



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

Ecole doctorale MATISSE

présentée par

Cyril Rigault

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
UFR de Mathématiques

Etude mathématique
de modèles cinétiques
pour la gravitation,
tenant compte d'effets
relativistes : stabilité,
solutions autosimilaires

Thèse soutenue à Rennes
le 11 décembre 2012

devant le jury composé de :

Mihai BOSTAN

Professeur Univ. Aix-Marseille / rapporteur

Jean DOLBEAULT

DR CNRS Univ. Paris Dauphine / examinateur

Maxime HAURAY

MCF Univ. Aix-Marseille / examinateur

Frédéric ROUSSET

Professeur Univ. Rennes 1 / examinateur

Mohammed LEMOU

DR CNRS Univ. Rennes 1 / directeur de thèse

Florian MEHATS

Professeur Univ. Rennes 1 / directeur de thèse

Rapporteurs : **Reinhard ILLNER**, Professeur de l'Université de Victoria, Canada,
Mihai BOSTAN, Professeur de l'Université d'Aix-Marseille.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Mohammed Lemou et Florian Méhats de m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet et de m'avoir accompagné pendant ces trois années. Travailler avec eux a été un réel plaisir : leurs conseils avisés et leur bonne humeur communicative m'ont permis de m'épanouir pleinement dans ma recherche. J'ai beaucoup appris grâce à eux et je leur suis très reconnaissant du temps qu'ils m'ont consacré.

Je remercie également Mihai Bostan et Reinhard Illner d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse ainsi que Jean Dolbeault, Maxime Hauray et Frédéric Rousset de m'avoir fait l'honneur de composer mon jury. Le fait que des chercheurs aussi reconnus s'intéressent à mon travail est un grand privilège.

Au moment de soutenir ma thèse, j'ai aussi une pensée toute particulière pour Naoufel Ben Abdallah, qui nous a quitté tragiquement en 2010. Je n'ai malheureusement pas eu la chance de le rencontrer et pourtant, de par ses discussions avec Florian et Mohammed, il m'a été d'une grande aide à un moment sensible de ma thèse.

En outre, ces trois années de thèse n'auraient pas été les mêmes sans l'excellente ambiance qui règne à l'IRMAR. L'équipe administrative, qui nous aide toujours avec plaisir et avec le sourire, n'y est pas étrangère : un grand merci à eux.

Je remercie également les chercheurs de l'IRMAR qui ont rendu ces années de recherche très enrichissantes : je tiens en particulier à remercier Nicolas Crouseilles pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée.

Enfin, je ne peux évoquer l'IRMAR sans remercier l'ensemble des thésards qui s'y sont succédé pendant ces trois années et, avec qui, j'ai eu la chance de partager des moments très agréables, notamment à l'heure du déjeuner.

Parmi ces thésards, je remercie tout particulièrement mes co-bureaux, Thibaut et Guillaume, devenus de vrais amis et, grâce à qui, ce bureau 206 a connu des moments de franche rigolade.

Je remercie également les membres de l'équipe de mathématiques de l'ENS Cachan, antenne de Bretagne, et notamment Arnaud Debussche et Michel Pierre, pour la formation de grande qualité qu'ils m'ont dispensée et pour leur accueil toujours très chaleureux.

Je voudrais maintenant dire un grand merci à mes amis. Je pense tout d'abord à ceux rencontrés dans le cadre de l'ENS et, notamment, à Pierre, Rémi, Claire et Marion. Je suis toujours très heureux de les voir et de me faire inviter chez eux : un jour, promis, j'aurai un appartement assez grand pour tous vous inviter. J'espère qu'on obtiendra des postes pas trop éloignés les uns des autres.

Un grand merci également à mes amis du water-polo, qui m'ont accueilli à bras ouverts lorsque je suis arrivé à Rennes, m'ont fait découvrir l'ambiance festive rennaise et m'ont permis de pratiquer l'une de mes passions, le water-polo.

Je ne peux terminer sans remercier ceux grâce à qui ma vie est un vrai bonheur : ma grande famille et Delphine, ma petite famille. Grâce à mes parents, à Caroline, Bruno, Jérôme, Estelle et Pierre, ainsi qu'à Alexis, Esteban, Quentin, Théilo et Rémi, mes retours à Herblay sont toujours un bol d'air frais. Merci simplement d'être vous et de cultiver cet esprit de famille, si important à mes yeux.

Papa et Maman, je n'en serais pas là aujourd'hui sans vous et sans tout ce que vous avez fait pour permettre à chacun de nous quatre de nous épanouir pleinement : je ne vous en remercierai jamais assez.

Delphine, merci d'avoir toujours été présente pendant ces six années, de m'avoir soutenu dans les moments difficiles et de me rendre heureux chaque jour que je passe avec toi. La réussite de ma thèse te doit énormément. L'énergie que tu m'as insufflée tout au long de ces années m'a été précieuse pour avancer dans ma recherche.

Table des matières

Résumé en français	5
1 Introduction générale	5
2 Etats stationnaires stables pour le système de Vlasov-Manev	12
3 Solutions auto-similaires explosives pour Vlasov-Manev pur	19
4 Stabilité pour le système de Vlasov-Poisson relativiste	24
5 Etude numérique de l'équation radiale de Vlasov-Poisson	31
1 Stable ground states for the Vlasov-Manev system	37
1.1 Introduction and main results	37
1.2 Existence of ground states	43
1.2.1 Properties of the infimum	43
1.2.2 Proof of Theorem 1.1.1	46
1.3 Orbital stability of the ground states	53
1.3.1 Uniqueness of the minimizer under equimeasurability condition . . .	53
1.3.2 Orbital stability of the minimizers, proof of Theorem 1.1.3	55
1.4 Appendix	64
1.4.1 Rescalings	64
1.4.2 Some properties of radially symmetric potentials	66
2 Self-similar blow-up solutions for the pure VM system	69
2.1 Main result	69
2.2 Self-similar solutions in the pure Manev case	72
2.2.1 Reduction to a functional of a modified microscopic energy	74
2.2.2 Existence of self-similar solutions	79
2.3 Appendix: Virial identity	87
3 Stable ground states for relativistic Vlasov-Poisson	89
3.1 Introduction and main results	89
3.1.1 Introduction to the relativistic Vlasov-Poisson system	89
3.1.2 Main results and strategy of the proof	91
3.2 Coercivity of the functional J	93
3.2.1 Second order Taylor expansion of J at ϕ_Q	94
3.2.2 Proof of Proposition 3.2.2.	103

3.3	Nonlinear stability of Q	109
3.3.1	Local compactness of the distribution function	109
3.3.2	Stability from the local compactness	115
3.4	Appendix	117
3.4.1	Jacobian of the microscopic energy	117
3.4.2	Rearrangement with respect to the microscopic energy	123
4	Etude numérique de Vlasov-Poisson radial	129
4.1	Introduction	129
4.1.1	Présentation générale	129
4.1.2	Choix du système de variables	131
4.2	Etude théorique de différents schémas numériques	133
4.2.1	Cadre général	133
4.2.2	Notations et Consistance	135
	Notations générales	135
	Un schéma consistant et stable	137
4.2.3	Conservation de la masse	139
	Critères de conservation de la masse	139
	Un exemple de schéma conservant la masse	141
4.2.4	Conservation du Hamiltonien	143
4.3	Tests numériques	146
4.3.1	Conservation de la masse et du Hamiltonien	146
4.3.2	Comportement autour d'un état stationnaire	152

Résumé en français

1 Introduction générale

1.1 Des modèles galactiques aux équations de Vlasov

En 1991, Jostein Gaarder a écrit dans "*Le Monde de Sophie*" :

"L'univers est une énigme bouleversante : dès que je m'interroge à son sujet, je me sens plus vivant. Peu importe que nous ne puissions pas répondre à toutes les questions : d'y méditer, cela suffit."

En suivant son conseil, je vous propose de nous questionner sur l'univers, et plus particulièrement sur ces lieux de l'univers où se regroupent des milliards d'étoiles, les galaxies. Une première lecture du dictionnaire nous apprend :

"Galaxie : Vaste ensemble d'étoiles et de matière interstellaire dont la cohésion est assurée par la gravitation."

Comprendre les galaxies passe donc par la compréhension de la gravitation. Cette force permet à un nombre incalculable d'étoiles de se regrouper dans un endroit confiné de l'univers sans pour autant s'agglomérer en un unique astre géant. Cependant ce n'est pas toujours le cas, seules certaines configurations de galaxies permettent à celles-ci de perdurer sans se rétracter en un trou noir. Depuis 1936, grâce à leurs observations, les astrophysiciens répertorient ces formes particulières en différentes classes : galaxies elliptiques, en spirale, en spirale barrée...

Nous pouvons, comme dirait Jostein Gaarder, nous interroger sur ce sujet : Pourquoi ces configurations sont-elles stables ? Existe-t-il d'autres configurations qui n'ont jamais été observées ? Plus généralement, pouvons-nous prévoir l'évolution globale d'une galaxie et ainsi trouver celles qui seront stables ?

Aujourd'hui nous sommes encore loin de comprendre complètement la dynamique des galaxies et donc de répondre à toutes ces questions. Pour tenter de mesurer la distance qui nous sépare de leurs réponses, modélisons ce qu'est une galaxie. Une galaxie peut être considérée comme un système fermé composé de plusieurs centaines de milliards d'étoiles en interactions gravitationnelles les unes avec les autres. En effet à cette échelle on peut négliger les astres de faible masse tels que les planètes ainsi que les forces non gravitationnelles. Dans un cadre simple non relativiste, notre problème s'apparente donc au problème à N corps de Newton où le nombre N d'étoiles est très grand. Quand on sait que le problème

à 3 corps n'est toujours pas résolu, on comprend alors qu'étudier l'évolution d'une galaxie est très délicat.

Face à ces difficultés, Andrey Vlasov proposa dans les années 30 d'adapter aux systèmes gravitationnels l'approche statistique de Boltzmann jusque-là uniquement réservée aux gaz collisionnels. En négligeant les collisions entre étoiles qui sont assez rares il développa une méthode, dites de champ moyen, pour passer à la limite lorsque N tend vers l'infini. Ainsi il passa d'un système discret composé d'une multitude d'équations différentielles liées entre elles à un système continu composé d'une unique équation aux dérivées partielles non-linéaire en les variables d'espace et de vitesse. Ce type d'équations cinétiques, appelées équations de Vlasov, avait déjà été introduit auparavant par James Hopwood Jeans et donne une bonne approximation de l'évolution d'une galaxie lorsque le nombre d'étoiles est important. Ainsi on peut espérer mettre en évidence des configurations stables de galaxie en s'intéressant aux états stables des équations de Vlasov.

1.2 Présentation des modèles étudiés

Introduisons maintenant différents modèles gravitationnels et les équations de Vlasov correspondantes. La loi universelle de la gravitation par Isaac Newton pour laquelle le potentiel gravitationnel est de la forme

$$U(x) = -\frac{\delta}{4\pi|x|}$$

est le plus ancien de ces modèles et conduit à l'équation dite de Vlasov-Poisson

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t = 0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

dans laquelle $f = f(t, x, v) \geq 0$ est la fonction de distribution et ϕ_f le potentiel gravitationnel associé. Ce potentiel satisfait alors

$$\phi_f(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{4\pi|x - y|} dy, \quad (1.2)$$

ρ_f étant la densité associée à la fonction de distribution f :

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv.$$

Le potentiel ϕ_f est appelé potentiel de Poisson car il satisfait l'équation de Poisson

$$\Delta \phi_f = \rho_f.$$

Le système de Vlasov-Poisson est sans nul doute le plus étudié des systèmes cinétiques gravitationnels même si son utilisation connaît certaines limites. En effet à la fin du 19ème siècle le modèle newtonien fut remis en question puisqu'il ne permettait pas d'expliquer

l'avancée du périhélie de Mercure. Deux nouvelles théories permirent alors d'expliquer ce phénomène. Gregory Manev proposa dans les années 20 de considérer un potentiel de la forme

$$U(x) = -\frac{\delta}{4\pi|x|} - \frac{\kappa}{2\pi^2|x|^2},$$

en ajoutant un terme correctif au potentiel newtonien [48, 49, 50, 51]. Dans l'équation de Vlasov-Manev correspondante seule l'expression du potentiel change par rapport à l'équation de Vlasov-Poisson : il devient

$$\phi_f(t, x) = \delta\phi_f^P + \kappa\phi_f^M, \quad (1.3)$$

où ϕ_f^P and ϕ_f^M sont respectivement le potentiel de Poisson et le potentiel de Manev de f donné par :

$$\phi_f^P(t, x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{4\pi|x-y|} dy, \quad \phi_f^M(t, x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{2\pi^2|x-y|^2} dy, \quad (1.4)$$

A l'époque ce modèle fut très peu étudié et très vite oublié à la faveur de la théorie relativiste développée par Albert Einstein dès le début du 20ème siècle. Celui-ci tout d'abord proposa la théorie de la relativité restreinte stipulant en particulier qu'aucun n'objet ne peut dépasser la vitesse de la lumière c . Ce modèle est lié à l'équation de Vlasov-Poisson relativiste :

$$\partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2/c^2}} \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, \quad (1.5)$$

pour laquelle le potentiel ϕ_f est le potentiel de Poisson (1.2). Plus tard, Einstein développa d'avantage sa théorie pour aboutir à la théorie de la relativité générale. Ce modèle basé sur l'idée de déformation de l'espace-temps par la masse est considéré comme le plus complet pour l'étude des phénomènes stellaires. Nous n'étudierons pas ici l'équation de Vlasov-Einstein correspondante du fait de sa complexité : cela reste cependant un but à plus long terme.

Pendant près d'un siècle, les recherches liées à la gravitation s'appuyèrent uniquement sur le cadre newtonien et sur le cadre relativiste. Le potentiel de Manev pour sa part ne refit son apparition que dans les années 90 : les difficultés rencontrées dans l'étude d'un problème relativiste à N corps poussèrent Diacu, Mingarelli, Mioc et Stoica à de nouveau l'utiliser [18]. L'équation de Vlasov-Manev correspondante fut par la suite introduite et étudiée par Bobylev, Dukes, Illner et Victory [13, 14]. Cependant, aujourd'hui encore, ce modèle reste très méconnu et peu d'articles y réfèrent.

Les équations cinétiques de Vlasov-Poisson classique, Vlasov-Poisson relativiste et Vlasov-Manev seront au coeur de notre étude. En particulier, nous nous intéresserons à leurs états stationnaires et à leur stabilité en un sens que l'on précisera. Avant de mettre en valeur notre travail, nous allons évoquer les différentes propriétés et résultats connus relatifs à ces équations.

1.3 Propriétés conservatives des équations de Vlasov

Les équations de Vlasov respectent certaines propriétés conservatives communes. En particulier sont conservées ce qu'on appelle les fonctions de Casimir : toute fonction de distribution f assez régulière vérifiant une équation de Vlasov sur un intervalle de temps $[0, T]$, avec $f(t=0) = f_0$, satisfait

$$\forall t \in [0, T], \quad \int_{\mathbb{R}^6} \beta(f(t, x, v)) dx dv = \int_{\mathbb{R}^6} \beta(f_0(x, v)) dx dv \quad (1.6)$$

pour toute fonction $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ vérifiant $\beta(0) = 0$. En particulier, les normes $\|f(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}$ sont conservées. De manière équivalente la fonction de distribution de f est conservée au cours du temps :

$$\forall t \in [0, T], \quad \mu_{f(t)} = \mu_{f_0}, \quad (1.7)$$

où la fonction de distribution μ_f est définie à partir de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^6 par

$$\forall s \geq 0, \quad \mu_f(s) = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, f(x, v) > s\}. \quad (1.8)$$

On appellera également cette propriété, équimesurabilité de f au cours du temps.

En accord avec les principes fondamentaux de la physique, l'énergie totale du système est aussi conservée pour des solutions assez régulières. Mathématiquement ceci correspond à la conservation du Hamiltonien au cours du temps :

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathcal{H}(f(t)) = \mathcal{H}(f_0).$$

Cet Hamiltonien est de la forme générale :

$$\mathcal{H}(f) = E_{kin}(f) - E_{pot}(f), \quad (1.9)$$

où $E_{kin}(f)$ et $E_{pot}(f)$ représentent respectivement l'énergie potentielle et l'énergie cinétique associées à la fonction de distribution f . L'énergie cinétique est définie par

$$E_{kin}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(x, v) dx dv \text{ ou } E_{kin}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} 2c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{|v|^2}{c^2}} - 1 \right) f(x, v) dx dv,$$

la première expression correspondant aux cas non relativistes (Vlasov-Poisson et Vlasov-Manev) et la seconde au système de Vlasov-Poisson relativiste. L'énergie potentielle pour sa part s'écrit de manière unique

$$E_{pot}(f) = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_f(x) \rho_f(x) dx,$$

même si, on le rappelle, l'expression du potentiel ϕ_f dépend du modèle considéré.

Ces deux invariants sont la base des travaux menés sur les équations de Vlasov. En effet, en se plaçant dans un espace de fonctions adéquat et sous certaines hypothèses, ils ont pour principale conséquence le contrôle de toutes les quantités introduites jusqu'ici et

en particulier de l'énergie cinétique. Par exemple, dans le cas du système de Vlasov-Poisson, pour tout $p > 9/7$, on a l'inégalité d'interpolation

$$0 \leq E_{pot}(f) \leq CE_{kin}(f)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}, \quad (1.10)$$

qui implique

$$\mathcal{H}(f) \geq E_{kin}(f) - CE_{kin}(f)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}.$$

Ainsi pour une solution de cette équation, le Hamiltonien et les normes $L^p(\mathbb{R}^6)$ étant conservés, l'énergie cinétique est bornée. Nous verrons que ce raisonnement s'applique aussi dans le cas relativiste et dans le cas de Vlasov-Manev mais demande ce qu'on appelle une condition sous-critique.

Ce contrôle est une clé de la théorie de Cauchy développée jusqu'à maintenant mais aussi une clé de la démonstration de la stabilité d'états stationnaires par méthodes variationnelles. Concernant la théorie de Cauchy, l'importance de ce contrôle ne sera évoquée que brièvement dans la partie suivante tandis que son lien avec la stabilité sera largement développé tout au long des chapitres.

1.4 La théorie de Cauchy

Faisons tout d'abord un point sur l'avancée de la théorie de Cauchy pour l'équation de Vlasov-Poisson. Cette question a fait l'objet de nombreuses études depuis les années 70. Arsen'ev [5] et Illner et Neunzert [36] furent les premiers à obtenir des résultats d'existence de solutions faibles. Dans les années 80, Horst et Hunze [35], ainsi que Diperna et Lions [19, 20] développèrent la théorie de Cauchy dans ce cadre de solutions faibles. Au même moment, Bardos et Degond [6] donnèrent le premier résultat d'existence dans un cadre régulier. De nombreux travaux concernant des solutions régulières s'en suivirent, notamment ceux de Lions et Perthame [47], de Pfaffelmoser [55] et de Schaeffer [58]. Ainsi, aujourd'hui, l'équation de Vlasov-Poisson est l'une des rares équations non-linéaires de cette famille pour laquelle ont été démontrées l'existence et l'unicité de solutions dans un cas régulier. En effet, la régularité du champ de force $\nabla\phi_f$ permettant de définir les caractéristiques a été obtenue par le contrôle des moments en vitesse découlant des propriétés conservatives du système.

Dans un cadre faible, les résultats obtenus ne sont pas aussi poussés. Comme le développent Bouchut, Golse et Pulvirenti [15], on peut construire des solutions faibles dans des espaces du type

$$\mathcal{E}_p = \{f \geq 0 \text{ telle que } \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p} + E_{kin}(f) < +\infty\}$$

où p est une constante assez grande permettant, comme on l'a évoqué précédemment, de contrôler l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système. Cependant l'unicité de telles solutions reste une question ouverte. Ces solutions sont renormalisées au sens de Diperna et Lions [19, 20] : en particulier bien qu'elles respectent la conservation des fonctions de Casimir (1.6) et donc l'équimesurabilité au cours du temps, on perd la conservation du Hamiltonien : la solution renormalisée vérifie seulement

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_0).$$

L'existence de solutions faibles dans de tels espaces est connue et se généralise au système de Vlasov-Poisson relativiste et au système de Vlasov-Manev. Par contre, en ce qui concerne les solutions régulières pour le système de Vlasov-Poisson relativiste, à notre connaissance, seuls des résultats dans le cas radial sont connus (voir [23] et [37]). En particulier, comme dans le cas non relativiste, Glassey et Schaeffer montrent qu'une explosion en temps fini correspond à une explosion de l'énergie cinétique du système. Enfin le seul résultat que nous connaissons relatif à l'équation de Vlasov-Manev est l'étude réalisée par Bobylev, Dukes, Illner et Victory qui montre l'existence locale et l'unicité d'une solution pour un état initial assez régulier [14].

Bien que nous étudions ici uniquement des problèmes posés dans tout l'espace physique, le système de Vlasov-Poisson a aussi été étudié dans des domaines bornés (dans le cas des plasmas). La donnée au bord pouvant générer des discontinuités, le cadre des solutions faibles est naturel pour ce type de problèmes, voir par exemple les travaux de Ben Abdallah [8], Alexandre [1], Mischler [53], Guo [26] ou Bostan [10, 11].

Dans la suite de ce rapport, la stabilité des états stationnaires se fera dans des espaces de type \mathcal{E}_p et pour des solutions renormalisées au sens de Diperna et Lions, qui sont en adéquation avec l'approche variationnelle utilisée.

1.5 Stabilité des solutions stationnaires

Nos équations de Vlasov admettent *a priori* une infinité de solutions stationnaires qu'on ne sait exhiber entièrement. Cependant, une classe particulière d'états stationnaires apparaît naturellement lorsqu'on étudie le cadre simplifié, dit à symétrie sphérique ou radiale, c'est-à-dire pour les solutions fonctions de $|x|$, $|v|$ et $x \cdot v$. Dans ce cas, Batt Faltenbacher et Horst [7] ont montré que les solutions stationnaires s'écrivent sous la forme

$$Q(x, v) = F(e_Q(x, v), |x \wedge v|), \quad (1.11)$$

où $e_Q(x, v)$ est l'énergie microscopique du système définie par

$$e_Q(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x),$$

dans le cas non relativiste et par

$$e_Q(x, v) = c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{|v|^2}{c^2}} - 1 \right) + \phi_Q(x),$$

pour l'équation de Vlasov-Poisson relativiste. Les différents travaux sur la stabilité menés jusqu'à aujourd'hui considèrent des états stationnaires de ce type. Nous nous limiterons ici à l'étude de solutions stationnaires du type

$$Q = F(e_Q(x, y)). \quad (1.12)$$

Les physiciens s'intéressent tout particulièrement au cas décroissant $F' < 0$ régulièrement rencontré lorsqu'on considère des minima d'énergies.

Le premier résultat de stabilité pour l'équation de Vlasov-Poisson a été donné par Antonov [3, 4] suivi par Doremus, Baumann et Feix [22]. Cependant la stabilité d'états stationnaires fonctions de leur énergie microscopique y fut démontrée uniquement dans un cadre linéarisé, qui ne permet pas de conclure *a priori* sur la stabilité non-linéaire. Cette question bien plus complexe attira alors l'attention de nombreux chercheurs. Les précurseurs Wolansky, Guo et Rein [61, 24, 25, 28, 29] puis, plus récemment Dolbeault, Sanchez Soler [21, 57, 59] et Lemou, Méhats et Raphaël [38, 40], développèrent des méthodes variationnelles dans le but de construire et montrer la stabilité non-linéaire d'états stationnaires dans des espaces du type

$$\mathcal{E}_p = \{f \geq 0 \text{ tel que } \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p} + E_{kin}(f) < +\infty\}.$$

La technique générale alors employée comporte 3 étapes :

Première étape : Obtenir un état stationnaire comme solution d'un problème de minimisation sous contraintes, pour lequel la fonctionnelle à minimiser est le Hamiltonien et les contraintes doivent être conservées par le flot. En pratique, les contraintes sont généralement des fonctions de Casimir telles que les normes L^p .

Deuxième étape : Montrer la compacité des suites minimisantes pour ce problème variationnel : ce second point est souvent basé sur le Lemme de concentration-compacité de Lions [45, 46] permettant d'obtenir la compacité en espace. La compacité en vitesse se déduit alors d'un contrôle de l'énergie cinétique. Dans le cas sphérique, l'utilisation de ce lemme est inadéquate, la compacité étant assez directe.

Troisième étape : Isoler cet état stationnaire des autres minimiseurs du problème. De préférence, il est bon de montrer l'unicité du minimiseur mais celle-ci n'est pas toujours vérifiée. Par exemple dans le cas Vlasov-Poisson, il est possible à partir de l'équation de Poisson de se ramener à une EDO pour laquelle les contraintes du problème variationnel impliquent l'unicité de la solution. Dès que le modèle se complique, cette séparation des minimiseurs devient très délicate.

Formellement, d'après la première étape, si un état initial f_0 est assez proche de la solution stationnaire Q , la fonctionnelle et les contraintes évaluées en $f(t)$, solution de l'équation de Vlasov, restent assez proches de celles évaluées en Q . Par l'étape deux, on en déduit que $f(t)$ est proche d'un minimiseur du problème variationnel et on conclut par la séparation des minimiseurs. En pratique, on démontre souvent ce résultat séquentiellement en utilisant un raisonnement par l'absurde.

Cette méthode a déjà été appliquée avec succès pour l'équation de Vlasov-Poisson dans le cas classique (newtonien) et dans le cas relativiste. Dans ces deux cas, la stabilité non-linéaire de solutions stationnaires obtenues comme minimiseurs du Hamiltonien avec contraintes a été démontrée. Cependant, ces minimiseurs ne représentent qu'une faible classe de solutions stationnaires parmi toutes les fonctions de leur énergie microscopique.

En particulier, la première classe de fonctions non obtenues par minimisation, dont on démontra la stabilité non-linéaire, fut la classe correspondant au modèle de King

$$F(e) = (\exp(e_0 - e) - 1)_+$$

où e représente l'énergie microscopique. Cette stabilité fut prouvée par Guo, Rein et Lin dans le cadre de perturbations à symétrie sphérique (ou radiales) pour le système de Vlasov-

Poisson [30, 27]. Pour le système de Vlasov-Poisson relativiste, la stabilité non-linéaire dans le cadre radial fut démontrée par Hadžić et Rein [31]. Ces chercheurs ont dû pour cela adapter la méthode suivante : en premier lieu, obtenir l'état stationnaire considéré comme minimiseur local d'un Hamiltonien modifié par des fonctions de Casimir, puis montrer la coercivité locale de cette énergie généralisée autour de cet état pour aboutir à la stabilité non-linéaire.

Beaucoup plus récemment, Lemou, Méhats et Raphaël obtinrent un résultat plus large : la stabilité non-linéaire pour toutes les fonctions décroissantes de leur énergie microscopique [42] : ils utilisèrent pour cela des méthodes résolument nouvelles qui seront développées chapitre 3.

Dans les parties qui suivent nous faisons une introduction aux différents résultats obtenus tout au long de cette thèse. Les trois premiers chapitres nous projettent progressivement vers l'utilisation de nouvelles méthodes qui sont amenées à être généralisées pour des systèmes plus complexes. Ces méthodes sont basées sur l'utilisation omniprésente de l'équimesurabilité pour palier les difficultés pouvant apparaître du fait, par exemple, d'un potentiel trop complexe (comme celui de Vlasov-Manev) ou d'un terme relativiste.

Ainsi, dans le chapitre 1, ces méthodes permettent la construction d'états stationnaires stables pour le système de Vlasov-Manev. Dans le chapitre 2, nous introduisons de nouveaux réarrangements dans le but de résoudre un problème de minimisation avec comme contrainte un espace de fonctions équimesurables : on construit ainsi une famille de solutions auto-similaires explosant en temps fini dans un cas particulier appelé Pur Manev (le potentiel étant restreint au potentiel ajouté par Manev). Et finalement, le chapitre 3 sera consacré à l'équation de Vlasov-Poisson relativiste et, plus particulièrement, nous démontrerons la stabilité non-linéaire de toutes solutions stationnaires fonctions décroissantes de leur énergie microscopique. L'utilisation des réarrangements introduits chapitre 3 y sera encore plus poussée.

L'étude proposée dans le chapitre 4 est un peu différente. On y propose des schémas numériques conservatifs adaptés à l'équation de Vlasov-Poisson à symétrie sphérique. Le but à plus long terme de cette étude serait d'explorer numériquement si l'amortissement Landau a lieu autour de solutions stationnaires, fonctions de leur énergie microscopique. Ce phénomène se traduit par une stabilité asymptotique avec décroissance exponentielle de certaines quantités moyennes. Notons que Mouhot et Villani [54] ont démontré ce résultat extrêmement compliqué dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson pour un espace périodique et autour d'un profil homogène en espace.

Dans les parties qui suivent, nous introduisons chacun de ces chapitres en mettant en évidence les résultats démontrés et en soulignant les méthodes utilisées ainsi que les difficultés rencontrées.

2 Etats stationnaires stables pour le système de Vlasov-Manev

Le but du chapitre 1 ici introduit sera de construire des états stationnaires pour le système de Vlasov-Manev et d'étudier leur stabilité. Cette étude a fait l'objet d'un ar-

à paraître dans le journal SIMA, SIAM Journal on Mathematical Analysis. L'un des apports principaux de cette étude est d'obtenir l'unicité des minimiseurs sous contraintes d'équimesurabilité.

Rappelons que pour ce système l'évolution de la fonction de distribution f est régie par l'équation non relativiste

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, \quad (2.1)$$

et le potentiel gravitationnel ϕ_f est défini par

$$\phi_f(t, x) = \delta \phi_f^P + \kappa \phi_f^M, \quad (2.2)$$

où ϕ_f^P and ϕ_f^M sont respectivement le potentiel de Poisson et le potentiel de Manev de f donnés par :

$$\phi_f^P(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{4\pi|x-y|} dy, \quad \phi_f^M(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{2\pi^2|x-y|^2} dy, \quad (2.3)$$

ρ_f étant la densité associée à la fonction de distribution f :

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv.$$

L'étude de ce système fera apparaître deux cas distincts : le cas $\delta = 0, \kappa = 1$ désigné comme le *cas pur Manev* et le cas $\delta > 0, \kappa \geq 0$ désigné comme le *cas Poisson-Manev*. Ce dernier cas inclut le cas newtonien $\delta = 1, \kappa = 0$. Notons que, par souci de simplification, le cas $\delta = 0, \kappa \neq 0$ n'a pas été évoqué car il est similaire au cas $\delta = 0, \kappa = 1$. D'ailleurs, le cas pur Manev n'a *a priori* pas de sens gravitationnel. Cependant, son étude est intéressante car il coïncide avec d'autres modèles physiques comme le détaillent Bobylev, Dukes, Illner et Victory dans [13] partie 4 *Various problems associated with the pure stellar dynamic Manev equation*. Enfin, remarquons que, lorsque $\delta \rightarrow 1$ et $\kappa \rightarrow 0$ dans le cas Poisson-Manev, on retrouvera les résultats démontrés dans [38, 40].

Dans les deux cas, le Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}(f(t)) = \||v|^2 f(t)\|_{L^1} - E_{pot}(f(t)), \quad (2.4)$$

où l'énergie potentielle

$$E_{pot}(f(t)) = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_f(t, x) \rho_f(t, x) dx = \delta E_{pot}^P(f(t)) + \kappa E_{pot}^M(f(t))$$

se décompose en deux termes correspondant respectivement au potentiel de Poisson et au potentiel de Manev :

$$E_{pot}^P(f(t)) = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_f^P(t, x) \rho_f(t, x) dx \quad \text{and} \quad E_{pot}^M(f(t)) = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_f^M(t, x) \rho_f(t, x) dx.$$

Ces termes sont contrôlés grâce aux inégalités classiques d'interpolation :

$$0 \leq E_{pot}^P(f) \leq C_1 \||v|^2 f\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}, \quad (2.5)$$

$$0 \leq E_{pot}^M(f) \leq C_2 \| |v|^2 f \|_{L^1} \| f \|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \| f \|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}}, \quad (2.6)$$

pour tout $p \geq 3$. Remarquons que l'inégalité (2.5) reste exacte pour $p > 9/7$. De plus, nous rappelons que le Hamiltonien et les fonctions de Casimir sont préservés.

Ces propriétés nous permettent de définir un espace de fonctions adéquat pour obtenir des états stationnaires. Nous considérons une fonction $j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

- (H1) j est une fonction \mathcal{C}^2 , avec $j(0) = j'(0) = 0$ et telle que $j''(t) > 0$ pour $t > 0$.
- (H2) Il existe $p, q > 3$ tels que

$$p \leq \frac{tj'(t)}{j(t)} \leq q, \quad \forall t > 0. \quad (2.7)$$

Notons que l'hypothèse (H2) est équivalente à la condition de non-dichotomie :

$$b^p j(t) \leq j(bt) \leq b^q j(t), \quad \forall b \geq 1, t \geq 0. \quad (2.8)$$

Pour une fonction j satisfaisant (H1) and (H2), on définit l'espace d'énergie correspondant

$$\mathcal{E}_j = \{f \geq 0 \text{ tel que } \|f\|_{\mathcal{E}_j} := \|f\|_{L^1} + \|f + j(f)\|_{L^1} + \| |v|^2 f \|_{L^1} < +\infty\} \quad (2.9)$$

Dans cet espace, le lien entre le Hamiltonien et l'énergie cinétique s'écrit alors

$$\mathcal{H}(f) \geq E_{kin}(f) \left(1 - \kappa C_2 \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f + j(f)\|_{L^1}^{\frac{2}{3(p-1)}} \right) - \delta C_1 E_{kin}(f)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|j(f)\|_{L^1}^{\frac{1}{3(p-1)}}. \quad (2.10)$$

A ce niveau de l'étude on peut déjà se douter des principales difficultés que nous rencontrerons en appliquant l'approche variationnelle standard au système de Vlasov-Manev. Habituellement, cette approche permet de construire des états stationnaires en minimisant le Hamiltonien en prenant des normes L^p comme contraintes. Ici il peut ne pas exister de bornes inférieures au Hamiltonien et donc pas de fonctions minimisant ce problème variationnel. Discutons de cette difficulté plus précisément en considérant les deux cas : pur Manev et Poisson-Manev.

La stabilité pour le cas pur Manev ($\delta = 0, \kappa = 1$) est impossible comme cela a déjà été mis en évidence dans [13]. On peut en effet construire des solutions explosant en temps fini dont l'état initial est proche d'une solution stationnaire. En fait, la structure de l'équation de Vlasov-Manev dans le cas pur peut être comparée en un certain sens avec celle de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 4 (voir [38]). De manière similaire, en suivant la méthode utilisée pour l'équation non-linéaire de Schrödinger [60], la minimisation de la constante dans l'inégalité d'interpolation (2.6) permet de construire des états stationnaires.

Dans le cas Poisson-Manev ($\delta > 0, \kappa > 0$) le potentiel est constitué de deux termes inhomogènes ce qui explique la difficulté rencontrée. On parle de rupture d'homogénéité. Ce phénomène est similaire à celui rencontré dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson relativiste même si dans ce dernier cas la rupture d'homogénéité provient de l'énergie cinétique. Comme dans ce cas relativiste [40], nous pouvons toujours considérer la minimisation

du Hamiltonien en se restreignant cependant à une condition sous-critique du type

$$\kappa C_2 \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f + j(f)\|_{L^1}^{\frac{2}{3(p-1)}} < 1.$$

En effet, sous cette condition, l'inégalité (2.10) permet d'obtenir une borne inférieure pour le Hamiltonien et de borner l'énergie cinétique. Notons qu'une telle condition sous-critique avait déjà été introduite dans [37] pour l'équation de Vlasov-Poisson relativiste. Pour la construction des états stationnaires nous procéderons donc dans les deux cas par une approche similaire à [40] et [38]. Avant d'énoncer le résultat ainsi obtenu, on définit à partir de l'inégalité d'interpolation (2.6) la constante :

$$K_j^M = \inf_{f \in \mathcal{E}_j \setminus \{0\}} K_j^M(f) \quad \text{avec} \quad K_j^M(f) = \frac{\| |v|^2 f \|_{L^1} \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f + j(f)\|_{L^1}^{\frac{2}{3(p-1)}}}{E_{pot}^M(f)}. \quad (2.11)$$

Notons que cette constante est strictement positive puisque d'après (2.8) on a $t + j(t) \geq Ct^p$ pour tout $t \geq 0$.

Théorème 2.1 (Existence d'états stationnaires). *Soit j une fonction satisfaisant (H1) et (H2).*

(i) Cas Poisson-Manev ($\delta > 0$). *Soit $M_1 > 0$, $M_j > 0$ tels que*

$$\kappa M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} (M_1 + M_j)^{\frac{2}{3(p-1)}} < K_j^M, \quad (2.12)$$

où la constante K_j^M est définie par (2.11), et soit

$$\mathcal{F}(M_1, M_j) = \{f \in \mathcal{E}_j, \|f\|_{L^1} = M_1, \|j(f)\|_{L^1} = M_j\}.$$

Alors il existe un état stationnaire de (2.1) qui minimise le problème variationnel

$$I(M_1, M_j) = \inf_{f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)} \mathcal{H}(f), \quad (2.13)$$

où \mathcal{H} est le Hamiltonien défini par (2.4).

(ii) Cas pur Manev ($\delta = 0$, $\kappa = 1$). *Pour tout $M_1, M_j > 0$, le problème variationnel suivant*

$$J(M_1, M_j) = \inf_{f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)} K(f), \quad \text{avec} \quad K(f) := \frac{\| |v|^2 f \|_{L^1}}{E_{pot}^M(f)} \quad (2.14)$$

admet un minimiseur. De plus, pour tout $M_1 > 0$, il existe un unique $M_j > 0$ tel que $J(M_1, M_j) = 1$ et les minimiseurs de (2.14) sont solutions stationnaires de (2.1) si et seulement si $J(M_1, M_j) = 1$.

(iii) Dans les deux cas ($\delta \geq 0$), chaque état stationnaire Q obtenu par minimisation de (2.13) ou (2.14) est continu à support compact et prend la forme

$$Q(x, v) = (j')^{-1} \left(\frac{\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) - \lambda}{\mu} \right)_+ \quad (2.15)$$

où les constantes λ et μ sont strictement négatives. De plus, $\phi_Q(x)$ est radiale (à une translation près), est croissante et appartient à $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$. Dans (2.15), on utilise la notation $a_+ = \max(a, 0)$.

Notons que, dans le cas $\delta = 1$ et $\kappa = 0$, la condition (2.12) est toujours vérifiée. Ce cas correspond au système de Vlasov-Poisson pour lequel ce résultat est déjà connu (voir [38]).

Grandes lignes de la démonstration : (i) et (ii) : De manière très classique en appliquant les réarrangements de Schwarz et certains redimensionnements (rescaling), on se ramène à une suite minimisante de fonctions, qui sont radiales en la variable d'espace x et qui sont uniformément bornées dans \mathcal{E}_j . Cette suite converge donc faiblement vers une fonction f de \mathcal{E}_j .

Le caractère radial permet d'obtenir la convergence forte de l'énergie potentielle. Donc, par passage à la limite, on perd de l'énergie totale ($\mathcal{H}(f)$ ou $K(f)$ selon le cas). Or, par le Lemme de Fatou, on perd aussi de la masse et de l'entropie. Par un simple rescaling on montre que cela n'est possible qu'en cas d'égalité. Ainsi f minimise le problème variationnel considéré.

(iii) : On emploie une technique identique à celle développée dans [38, 40] en différenciant les fonctionnelles $f \mapsto \mathcal{H}(f)$ et $f \mapsto K(f)$ de manière astucieuse pour rester dans $\mathcal{F}(M_1, M_j)$. Notons que l'utilisation des techniques de rescaling et du théorème des fonctions implicites est nécessaire. On obtient ainsi l'équation d'Euler-Lagrange (2.15) satisfaite par Q .

La régularité $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ provient d'un raisonnement par récurrence. Par l'inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev, la régularité de ρ_Q implique une régularité pour ϕ_Q . De plus, cette dernière implique elle-même une régularité sur ρ_Q puisque Q vérifie l'équation d'Euler-Lagrange (2.15). En bouclant ces deux propriétés, on déduit que $\rho_Q \in L^r(\mathbb{R}^3)$ avec $r > 3$. Grâce aux injections de Sobolev appliquées à

$$\Delta \phi_f^P = \rho_f \quad \text{and} \quad (-\Delta)^{1/2} \phi_f^M = -\rho_f,$$

on montre la régularité $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ du potentiel puis la régularité $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ en utilisant une dernière fois l'équation d'Euler-Lagrange et les injections de Sobolev.

Maintenant, comme ϕ_Q , par définition, tend vers 0 à l'infini, l'équation d'Euler-Lagrange implique que Q est à support compact. Ensuite, de manière très classique, en utilisant les réarrangements de Schwarz appliqués à la variable x , on montre que tout minimiseur est radial en espace à une translation près. Et enfin, le fait que ρ_Q soit radial nous apporte, après calcul, la croissance du potentiel ϕ_Q ce qui conclut la preuve du théorème 2.1. \square

En conclusion, ce théorème d'existence s'obtient de manière classique en adaptant des papiers sur les systèmes de Vlasov-Poisson non relativiste en dimension 4 et relativiste en dimension 3 [38, 40]. Nous nous intéressons maintenant à la stabilité de ces états stationnaires. Comme on l'a précédemment annoncé, cette stabilité repose généralement sur deux résultats : la séparation des minimiseurs et la compacité des suites minimisantes. Dans le cas de Vlasov-Poisson [40], l'unicité du minimiseur est obtenue en combinant l'équation de Poisson satisfaite par le potentiel

$$\Delta \phi_Q = \rho_Q$$

et l'équation d'Euler-Lagrange (2.15). En effet, on obtient dans le cas radial une équation différentielle ordinaire du type

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \phi'_Q(r)) = (1 - \phi_Q(r))_+^{\frac{3}{2} + \frac{1}{p-1}},$$

qui, couplée avec la convergence vers 0 du potentiel à l'infini, permet de conclure à l'unicité.

Dans le cas présent, le potentiel ne satisfait plus l'équation de Poisson. Il se décompose en deux potentiels, $\phi_Q = \delta \phi_Q^P + \kappa \phi_Q^M$, qui satisfont

$$\Delta \phi_Q^P = \rho_Q \quad \text{and} \quad (-\Delta)^{1/2} \phi_Q^M = -\rho_Q. \quad (2.16)$$

Ainsi utiliser la méthode de [40] semble complètement hors de portée. Pour contourner cette difficulté nous présentons une nouvelle méthode qui permet de démontrer l'unicité du minimiseur sous une contrainte d'équimesurabilité. L'utilisation de cette contrainte infinie permet de complètement éviter l'utilisation de l'équation (2.16).

Lemme 2.1 (Unicité des minimiseurs sous contrainte d'équimesurabilité). *Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, une fonction strictement décroissante sur \mathbb{R}_- , telle que $F(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$ et $F(\mathbb{R}_+) = \{0\}$. On définit*

$$Q_0(x, v) = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \psi_0(x)\right), \quad Q_1(x, v) = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \psi_1(x)\right)$$

sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ où ψ_0 et ψ_1 sont deux potentiels croissants continus et à symétrie radiale tels que les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^3, \psi_0(x) < 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^3, \psi_1(x) < 0\}$ sont bornés. Si l'équimesurabilité de Q_0 et Q_1 pour la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^6 est vérifiée, i.e.

$$\forall t > 0, \text{ meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, Q_0(x, v) > t\} = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, Q_1(x, v) > t\}, \quad (2.17)$$

alors on a l'égalité $Q_0 = Q_1$. En particulier :

- (i) Cas Poisson-Manev ($\delta \neq 0$) : deux états stationnaires équimesurables de (2.1) qui minimisent (2.13) sous la condition sous-critique (2.12) sont égaux à une translation en espace près.
- (ii) Cas pur Manev ($\delta = 0, \kappa = 1$) : deux états stationnaires équimesurables de (2.1) qui minimisent (2.14) et qui ont la même énergie cinétique sont égaux à une translation en espace près.

Une démonstration rapide : En utilisant des changements de variables bien posés, on a pour $i \in \{0, 1\}$ et pour tout $\tau < 0$,

$$a_{\psi_i}(\tau) := \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad \frac{|v|^2}{2} + \psi_i(x) < \tau \right\} = 4\pi\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\tau} \mu_{\psi_i}(w) \sqrt{\tau - w} dw,$$

où $\mu_{\psi_i}(\lambda) = \text{meas} \{x \in \mathbb{R}^3, \psi_i(x) < \lambda\}$. Or, l'équimesurabilité de Q_0 et Q_1 et les hypothèses sur F impliquent

$$\forall \tau < 0, \quad a_{\psi_0}(\tau) = a_{\psi_1}(\tau).$$

On obtient ainsi l'égalité $\psi_0 = \psi_1$ et donc $Q_0 = Q_1$. Les unicités des minimiseurs découlent de cette égalité en utilisant des changements de variables appropriés. \square

Notons que malgré la relative rapidité de sa démonstration, ce lemme est un résultat fort dans le sens où il permet d'éviter toute étude d'équation différentielle qui peut se révéler ardue. Sa démonstration ne dépend pas du tout de l'expression du potentiel considéré et est donc très adaptable.

Passons maintenant à la stabilité non-linéaire. Le résultat désiré suivant s'obtient en combinant l'unicité sous contrainte d'équimesurabilité et la compacité des suites minimisantes de (2.13) et (2.14).

Théorème 2.2 (Stabilité orbitale d'états stationnaires).

(i) Cas Poisson-Manev ($\delta > 0$). Soit $M_1, M_j > 0$ satisfaisant la condition sous-critique (3.1.10). Alors tout état stationnaire Q de (2.1) qui minimise (2.13) est orbitalement stable pour le flot (1.1.1). Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ satisfaisant la propriété suivante. Soit $f(t)$ une solution renormalisée de (2.1) sur un intervalle de temps $[0, T)$, $0 < T \leq +\infty$, dont la condition initiale f_0 vérifie $\|f_0 - Q\|_{\varepsilon_j} \leq \delta(\varepsilon)$. Alors il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in [0, T)$, nous avons

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q\|_{\varepsilon_j} < \varepsilon.$$

(ii) Cas pur Manev ($\delta = 0, \kappa = 1$). Soit Q un état stationnaire de (2.1) qui minimise (1.1.14). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta(\varepsilon) > 0$ telle que la propriété suivante est vérifiée. Soit $f(t)$ une solution renormalisée de (2.1) sur un intervalle de temps $[0, T)$, $0 < T \leq +\infty$, dont la condition initiale f_0 satisfait :

$$(a) \|f_0 - Q\|_{L^1} \leq \delta(\varepsilon) \text{ et } \|j(f_0)\|_{L^1} \leq \|j(Q)\|_{L^1} + \delta(\varepsilon),$$

$$(b) \forall t \in [0, T), \quad \lambda(t)^2 \mathcal{H}(f(t)) < \delta(\varepsilon) \quad \text{où } \lambda(t) = \left(\frac{\|v\|^2 Q\|_{L^1}}{\|v\|^2 f(t)\|_{L^1}} \right)^{1/2}.$$

Alors il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in [0, T)$, on a

$$\left\| f \left(t, \lambda(t)(x + x(t)), \frac{v}{\lambda(t)} \right) - Q \right\|_{\varepsilon_j} < \varepsilon.$$

Comme déjà évoqué auparavant, on ne peut pas espérer une stabilité au sens classique dans le cas pur Manev : en effet pour $T > 0$ et pour Q , état stationnaire de (2.1), la fonction

$$Q_T(t, x, v) = Q \left(\frac{Tx}{T-t}, \frac{T-t}{T}v + \frac{x}{T} \right),$$

est solution de (2.1) et explose en temps fini T .

Pour démontrer le théorème 2.2, nous utilisons la méthode classique détaillée dans l'introduction (voir [38, 40]). Le seul point restant à obtenir est la compacité des suites minimisantes qui découle du lemme de concentration-compacité de Lions [45, 46].

Donnons de manière succincte les étapes de cette preuve. On considère tout d'abord une suite minimisante (f_n) de notre problème variationnel et on montre que sa densité (ρ_{f_n}) vérifie les hypothèses du lemme de concentration-compacité à un redimensionnement près. Notons que ce redimensionnement est primordial pour le cas pur Manev car il permet d'obtenir une nouvelle suite dont l'énergie cinétique est bornée.

Pour déduire la compacité de la suite obtenue, renotée (ρ_{f_n}) , il suffit donc de prouver sa non-évanescence et sa non-dichotomie. La non-évanescence découle directement de la stricte

positivité de l'énergie potentielle $E_{pot}(Q) > 0$. De plus, l'étude par redimensionnement des fonctions I et J , définies par (2.13) et (2.14), permet d'aboutir à une propriété de non-dichotomie. On traduit cette propriété en terme d'énergie potentielle ce qui conduit à la non-dichotomie de (ρ_{f_n}) .

Ainsi, la compacité de (ρ_{f_n}) est donnée par le lemme de concentration-compacité. Combinée au contrôle de l'énergie cinétique, cette compacité nous conduit à celle de (f_n) et la compacité des suites minimisantes est démontrée.

3 Solutions auto-similaires explosives pour le système de Vlasov-Manev pur

Le chapitre 2 que nous introduisons dans cette partie a fait l'objet avec le chapitre précédent d'une publication commune. Il va de pair avec celui-ci : pour tout ce chapitre nous nous plaçons dans le cas pur Manev du système de Vlasov-Manev :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.1)$$

où le potentiel vérifie

$$\phi_f(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{2\pi^2 |x - y|^2} dy.$$

Rappelons que dans ce cas nous pouvons construire des solutions stationnaires de (3.1) qui minimisent le problème variationnel

$$J(M_1, M_j) = \inf_{f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)} K(f), \quad \text{avec } K(f) := \frac{\| |v|^2 f \|_{L^1}}{E_{pot}^M(f)}. \quad (3.2)$$

Une telle solution Q est à support compact et vérifie alors

$$Q(x, v) = F \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) \right),$$

où d'une part $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est décroissante s'annulant sur $[e, +\infty]$ pour un certain $e < 0$ et d'autre part ϕ_Q est radiale. Rappelons enfin que les solutions stationnaires minimisant (3.2) sont uniques sous une contrainte d'équimesurabilité et pour une énergie cinétique fixée.

Forts des résultats démontrés dans le chapitre 1, nous pouvons construire des solutions auto-similaires exactes explosives de (3.1) construites comme une famille continue autour du profil stationnaire Q . Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Solutions auto-similaires exactes dans le cas pur Manev). *Soit Q un état stationnaire de (3.1) qui minimise (3.2). Alors il existe une constante $b^* > 0$ telle que pour tout $b \in [0, b^*]$, il existe un profil stationnaire $Q_b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^6)$ radial, à support compact, de la forme*

$$Q_b(x, v) = F_b \left(\frac{|v|^2}{2} + bx \cdot v + \phi_{Q_b}(x) \right)$$

sur son support, et tel que, pour tout $T > 0$, la fonction

$$f(t, x, v) = Q_b \left(\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v \right) \quad \text{avec } \lambda(t) = \sqrt{2b(T-t)} \quad (3.3)$$

est une solution exacte auto-similaire et explosive du système (3.1) dans \mathcal{E}_j . Pour un tel profil, la fonction ϕ_{Q_b} appartient à \mathcal{C}^1 et la fonction F est une fonction positive continue sur \mathbb{R} ; plus particulièrement elle est \mathcal{C}^1 sur $]-\infty, e_b[$ pour un certain $e_b < 0$ et décroît vers 0 sur $[e_b, +\infty[$. De plus, Q_b converge vers $Q_0 = Q$ dans \mathcal{E}_j pour $b \rightarrow 0$.

Avant de détailler les grandes lignes de sa démonstration, commentons ce théorème. Tout d'abord, rappelons qu'une fonction radiale est une fonction dépendant uniquement des variables $|x|$, $|v|$ et $x \cdot v$. Ce théorème nous permet de distinguer trois profils dynamiques différents autour d'un état stationnaire Q minimisant (3.2) :

(i) *Solutions sous-critiques*. Pour une condition initiale f_0 sous-critique, *i.e.*

$$J(\|f_0\|_{L^1}, \|j(f_0)\|_{L^1}) > 1 = J(\|Q\|_{L^1}, \|j(Q)\|_{L^1}),$$

où J est définie par (3.2), l'énergie cinétique de la solution $f(t)$ est contrôlée en tout temps grâce à l'inégalité

$$\mathcal{H}(f(t)) \geq \| |v|^2 f \|_{L^1} \left(1 - \frac{1}{K(f(t))} \right) \geq \| |v|^2 f \|_{L^1} \left(1 - \frac{1}{J(\|f_0\|_{L^1}, \|j(f_0)\|_{L^1})} \right).$$

(ii) *Solutions pseudo-conformes explosives*. La famille suivante est une famille de solution explosant en temps fini T (voir [13, 14]) :

$$f(t, x, v) = Q \left(\frac{Tx}{T-t}, \frac{T-t}{T}v + \frac{x}{T} \right), \quad T > 0.$$

Remarquons que l'énergie cinétique explose à une vitesse $(T-t)^{-2}$.

(iii) *Solutions auto-similaires explosives*. Les solutions auto-similaires données par (3.3) explosent en temps fini et la vitesse d'explosion de l'énergie cinétique est $(T-t)^{-1}$.

Stratégie de la preuve du théorème 3.1. Nous ferons le lien avec la méthode utilisée pour obtenir un résultat similaire pour l'équation de Vlasov-Poisson [39]. La principale difficulté de notre cas sera de minimiser un problème variationnel sous une contrainte d'équimesurabilité. Ceci provient directement de l'unicité du profil stationnaire Q en tant que minimiseur du problème variationnel (3.2).

(a) *Introduction d'un nouveau problème de minimisation* : Tout d'abord, on redéfinit notre problème sous la forme d'un nouveau problème de minimisation. Dans ce but, notons que la fonction

$$f(t, x, v) = Q_b \left(\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v \right) \quad \text{avec } \lambda(t) = \sqrt{2b(T-t)} \quad (3.4)$$

est solution de l'équation (3.1) dans le cas pur Manev si le profil Q_b satisfait l'équation

$$v \cdot \nabla_x Q_b - \nabla_x \phi_{Q_b} \cdot \nabla_v Q_b + b(x \cdot \nabla_x Q_b - v \cdot \nabla_v Q_b) = 0. \quad (3.5)$$

Les fonctions de l'énergie microscopique liée à cette équation, c'est-à-dire du type

$$g(x, v) = F \left(\frac{|v|^2}{2} + bx \cdot v + \phi_g(x) \right)$$

en sont solutions. Cependant de telles solutions pour $b \neq 0$ n'appartiennent pas à l'espace d'énergie \mathcal{E}_j . Pour palier cette difficulté, introduisons une fonction plateau χ définie sur \mathbb{R}^3 à valeur dans $[0, 1]$ telle que

$$\chi(x) = 1 \text{ pour } |x| < r_\chi \text{ et } \chi(x) = 0 \text{ pour } |x| > R_\chi = 2r_\chi,$$

où la constante r_χ sera définie plus tard. Alors notre but va être de trouver un profil de la forme

$$Q_b(x, v) = F \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi_{Q_b}(x) \right), \quad (3.6)$$

à support compact dans $\{|x| < r_\chi\}$. Cette fonction appartient bien à \mathcal{E}_j et satisfait l'équation (3.5). Afin de construire de tels profils, il est naturel de considérer un problème de minimisation avec contraintes. De plus, comme ces profils auto-similaires doivent converger vers Q lorsque $b \rightarrow 0$, les contraintes à fixer pour ce problème doivent être l'équimesurabilité et une autre contrainte : l'énergie potentielle ou l'énergie cinétique. Dans le cas contraire, la famille de profils auto-similaires peut converger vers un autre état stationnaire. Nous considérons donc le problème de minimisation

$$T_b := \inf \{T_b(f) : f \in \text{Eq}(Q), \text{ à symétrie sphérique avec } E_{\text{pot}}(f) = E_{\text{pot}}(Q)\}, \quad (3.7)$$

où

$$T_b(f) = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v \right) f(x, v) dx dv \quad (3.8)$$

et

$$\text{Eq}(Q) = \{f \in \mathcal{E}_j : f \text{ est équimesurable avec } Q\}. \quad (3.9)$$

Pour démontrer le théorème 3.1, il suffit alors de prouver la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Avec les notations précédentes, il existe $b^* > 0$ telle que la propriété suivante soit vérifiée. Pour tout $b \in [0, b^*]$, le problème variationnel (3.7) admet au moins un minimiseur. De plus, il existe une famille de minimiseurs Q_b de (3.7) de la forme*

$$Q_b(x, v) = F_{Q_b} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \nu_b \phi_{Q_b}(x) \right),$$

où ν_b est strictement positif, et telle que, quand $b \rightarrow 0$, nous avons les convergences $\nu_b \rightarrow 1$ et $Q_b \rightarrow Q_0 = Q$ dans \mathcal{E}_j . De plus, le profil Q_b est à son support inclus dans $\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, |x| < r_\chi\}$ et son potentiel ϕ_{Q_b} appartient à \mathcal{C}^1 . Enfin, la fonction F_{Q_b} est positive et continue sur \mathbb{R} , et, plus précisément, elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, e_b[$ pour un certain $e_b < 0$ et décroît vers 0 sur $[e_b, +\infty[$.

L'idée générale de la preuve est basée sur une technique de réarrangements selon l'énergie microscopique qui conserve les contraintes du problème. Donnons tout d'abord formellement les étapes de construction des profils Q_b puis ensuite détaillons la technique de réarrangements utilisée.

(b) *Construction des profils Q_b* : On considère une suite minimisante f_n du problème (3.7). Par des techniques de réarrangements, pour b assez petit, on peut alors construire une suite \hat{f}_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{f}_n = F_n \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \nu_n \phi_{f_n}(x) \right),$$

qui vérifie $\nu_n > 0$ et

$$\hat{f}_n \in \text{Eq}(Q), \quad E_{\text{pot}}(\hat{f}_n) = E_{\text{pot}}(Q) \text{ et } T_b(\hat{f}_n) \leq T_b(f_n).$$

On obtient donc une nouvelle suite minimisante de (3.7). De plus, puisque f_n est aussi une suite minimisante de (3.7), elle est bornée dans \mathcal{E}_j et donc, à une sous-suite près, elle converge faiblement dans L^p vers une fonction f_b de \mathcal{E}_j . Ceci implique d'une part la convergence presque partout de ϕ_{f_n} vers ϕ_{f_b} et d'autre part, par construction, la convergence de F_n et ν_n vers respectivement une fonction F_b et une constante ν_b telles que

$$Q_b := F_b \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \nu_b \phi_{f_b}(x) \right) \in \text{Eq}(Q).$$

Ainsi, on obtient

$$\hat{f}_n \rightarrow Q_b \text{ dans } L^1 \cap L^p,$$

avec $E_{\text{pot}}(Q_b) = E_{\text{pot}}(Q)$. En montrant que Q_b est stable par les réarrangements utilisés ci-dessus, on a $T_b(Q_b) = T_b$ et on a ainsi construit le profil auto-similaire Q_b souhaité. Ensuite, en utilisant l'unicité et la concentration des suites minimisantes obtenues dans le chapitre 1, on conclut à la convergence de Q_b vers $Q = Q_0$ quand b tend vers 0. Pour finir, on peut remarquer par l'étude du support de Q_b que, pour un r_χ bien choisi et pour b assez petit, tous les profils Q_b sont à support compact dans $\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, |x| < r_\chi\}$.

Nous allons maintenant rentrer plus en détail dans les techniques de réarrangements utilisées qui sont le coeur de la démonstration de la Proposition 3.1 et donc du Théorème 3.1.

(c) *Réarrangement par rapport à l'énergie microscopique* : Pour obtenir \hat{f}_n à partir de f_n , il suffit plus généralement de montrer que, pour une fonction f à symétrie sphérique appartenant à $\text{Eq}(Q)$, définie par (3.9), et de même énergie potentielle que Q , il existe $\nu > 0$ et $g \in \text{Eq}(Q)$ telles que, d'une part, g soit fonction de l'énergie microscopique

$$e(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi_f(x)$$

et que, d'autre part,

$$E_{\text{pot}}(g) = E_{\text{pot}}(Q) \text{ et } T_b(g) \leq T_b(f).$$

Tout d'abord, montrons comment construire, à partir de l'état stationnaire Q et d'un potentiel radial non nul ϕ , une fonction de l'énergie microscopique

$$e(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x)$$

équimesurable à Q . On s'inspire et on utilise pour cela les réarrangements de Schwarz. Rappelons que, pour une fonction positive f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$, son réarrangement f^* au sens de Schwarz est l'unique fonction décroissante de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que les fonctions de distribution de f^* et f respectivement dans \mathbb{R} et dans \mathbb{R}^n , notées μ_{f^*} et μ_f , soient égales. Cette fonction f^* se définit comme suit

$$\forall s \geq 0, f^*(s) = \inf\{\tau \geq 0 : \mu_f(\tau) \leq s\}.$$

Ainsi, on peut trouver une fonction de $|(x, v)|$ équimesurable à f dans \mathbb{R}^3 . Utilisons ce résultat pour mettre en évidence la fonction recherchée.

Tout d'abord, il est nécessaire de définir le jacobien $a_{b,\phi} : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$a_{b,\phi}(e) = \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) < e \right\}, \quad \forall e < 0,$$

où la notation "meas" correspond à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^6 . Notons alors que, pour

$$e_{b,\phi} = \inf \text{ess} \left[\phi(r) - \frac{(b\chi(r)r)^2}{2} \right] \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\},$$

la fonction $a_{b,\phi}$ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme croissant de $(e_{b,\phi}, 0)$ sur \mathbb{R}_+^* et qu'elle s'annule sur $] -\infty, e_{b,\phi}]$. Ces propriétés s'obtiennent en réécrivant $a_{b,\phi}$ sous la forme plus explicite

$$\forall e < 0, \quad a_{b,\phi}(e) = \frac{32\pi^2\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \left(e - \phi(r) + \frac{(b\chi(r)r)^2}{2} \right)_+^{3/2} r^2 dr. \quad (3.10)$$

Ce changement de variable étant à notre disposition, nous pouvons maintenant construire la fonction souhaitée, notée $Q^{*b,\phi}$, en utilisant le réarrangement de Schwarz f^* . Elle se définit par

$$Q^{*b,\phi}(x, v) = \begin{cases} Q^* \circ a_{b,\phi} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) & \text{si } \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) < 0, \\ 0 & \text{si } \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \geq 0. \end{cases}$$

Elle est une fonction décroissante de l'énergie microscopique $e(x, v)$, fonction dont la continuité découle de celle de Q . De plus, $Q^{*b,\phi}$ est équimesurable à Q . Enfin, notons que, si $f \in \text{Eq}(Q)$ est à symétrie sphérique, alors, pour $\nu > 0$, on a

$$\int \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \nu\phi_f(x) \right) \left(Q^{*b,\nu\phi_f}(x, v) - f(x, v) \right) dx dv \leq 0 \quad (3.11)$$

avec égalité si et seulement si $f = Q^{*b, \nu \phi_f}$. Cette inégalité implique après calcul que

$$T_b(Q^{*b, \nu \phi_f}) \leq T_b(f) + \frac{\nu}{2} \left(E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_f}) - E_{pot}(f) \right).$$

Ainsi, pour terminer la preuve de la proposition 3.1, il nous suffit de montrer qu'il existe un $\nu > 0$ tel que $E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_f}) = E_{pot}(Q)$. Ce point est assez subtil à obtenir : par l'étude plus précise de la méthode de réarrangement, on obtient la continuité de la fonction $\nu \mapsto E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_f})$ puis, pour b assez petit,

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_f}) < E_{pot}(Q).$$

Il nous reste alors à montrer que

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_f}) > E_{pot}(Q).$$

Dans le cadre général $f \in Eq(Q)$, rien ne nous permet *a priori* de conclure à cette dernière estimation. Par contre, pour les termes d'une suite minimisante f_n du problème (3.7), on parvient à l'obtenir pour n assez grand. Formellement la suite f_n tend faiblement pour b fixé assez petit vers un certain potentiel g_b , qui lui même tend faiblement vers une fonction f lorsque $b \rightarrow 0$. En travaillant par l'absurde et grâce à des estimations sur les supports des fonctions $Q^{*b, \nu \phi_{g_b}}$, on montre que f est minimiseur de (3.2) et que son potentiel ϕ_f doit être constant sur son support ce qui amène une contradiction. Le théorème 3.1 est ainsi démontré. □

4 Stabilité d'états stationnaires pour le système de Vlasov-Poisson relativiste

On a jusqu'à maintenant présenté des résultats concernant le système de Vlasov-Manev, en faisant le lien avec les méthodes déjà utilisées dans les cas des systèmes de Vlasov-Poisson classique et relativiste. Les difficultés de ce nouveau modèle, notamment liées à la séparation des états stationnaires étudiés, nous ont amenés à développer de nouvelles méthodes basées sur la réduction de fonctions par rapport à l'énergie microscopique.

Dans le cas où le potentiel est de Poisson, ces méthodes ne sont pas nécessaires pour séparer les états stationnaires obtenus comme minimiseurs du Hamiltonien (voir [38, 40]). Cependant, nous allons voir que, même dans ce cas, pour obtenir la stabilité non-linéaire d'une plus grande classe d'états stationnaires, l'utilisation de ces méthodes combinée avec l'utilisation totale de la rigidité du flot est primordiale. Pour le système de Vlasov-Poisson, cette approche a été développée par Méhats, Lemou et Raphaël qui ont prouvé la stabilité de tout état stationnaire sphérique de la forme

$$Q = F \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) \right)$$

pour une fonction F décroissante assez régulière [42]. On se propose de faire de même pour le cas relativiste.

On se place donc dans le cadre d'un système gravitationnel modélisé par le système de Vlasov-Poisson relativiste :

$$\begin{cases} \partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}} \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t=0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

pour lequel le potentiel est un potentiel de Poisson défini de manière équivalente par

$$\begin{cases} \Delta \phi_f(t, x) = \rho_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \\ \phi_f(t, x) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (4.2)$$

ou par

$$\phi_f(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * \rho_f. \quad (4.3)$$

Nous définissons le Hamiltonien par

$$\mathcal{H}(f(t)) = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 \right) f(t, x, v) dx dv - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_f(t, x)|^2 dx, \quad (4.4)$$

où les deux termes correspondent respectivement à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle. Cette dernière vérifie l'inégalité d'interpolation

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_f|^2 dx \leq C_p \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}} \left\| \sqrt{1+|v|^2} f \right\|_{L^1} \quad (4.5)$$

pour tout $p > 3/2$ et nous nous plaçons donc naturellement dans l'espace d'énergie

$$\mathcal{E}_p = \left\{ f \geq 0 \text{ avec } \|f\|_{\mathcal{E}_p} := \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p} + \left\| \sqrt{1+|v|^2} f \right\|_{L^1} < +\infty \right\} \quad (4.6)$$

pour une constante $p > 3/2$. Nous avons alors, dans cet espace, la stabilité non-linéaire de tout état stationnaire sphérique fonction de son énergie microscopique :

Théorème 4.1 (Stabilité de modèles sphériques). *Soit Q une solution stationnaire de (4.1), sphérique (fonction de $|x|$ et $|v|$), continue, positive, non nulle et à support compact. De plus, supposons que Q est une fonction croissante et continue de son énergie microscopique, i.e. il existe une fonction continue $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $e_0 < 0$ telle que pour tout $(x, v) \in \mathbb{R}^6$*

$$Q(x, v) = F \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right), \quad (4.7)$$

avec $F(e) = 0$ pour $e \geq e_0$ et F strictement décroissante et \mathcal{C}^1 sur $(-\infty, e_0)$. Soit $p > \frac{3}{2}$. Alors Q est orbitalement \mathcal{E}_p -stable par le flot (4.1) : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que la propriété suivante est vérifiée. Soit une fonction $f_0 \in \mathcal{E}_p$ telle que

$$\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} \leq \eta \quad (4.8)$$

et soit $f(t)$ une solution renormalisée de (4.1) sur $[0, T)$ d'état initial f_0 . Alors pour tout $t \in [0, T)$ il existe une famille $z(t)$ de translations en espace telle que

$$\|f(t, x, v) - Q(x - z(t), v)\|_{\mathcal{E}_p} \leq \varepsilon. \quad (4.9)$$

Remarque : Notons que le cadre dans lequel nous nous sommes placés conduit à des difficultés qui n'ont pas été rencontrées dans l'article [42].

(i) Tout d'abord, le cas relativiste au même titre que l'équation Vlasov-Manev fait apparaître une rupture d'homogénéité qui n'existe pas dans le système de Vlasov-Poisson classique. Cette inhomogénéité en vitesse pose deux problèmes principaux. Le profil Q considéré ici ne satisfait *a priori* aucune condition sous-critique et donc on ne peut contrôler l'énergie cinétique d'une solution qui lui serait proche. Le deuxième point est lié à la méthode que l'on souhaite utiliser : à x fixé, le changement de variable $k = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x)$ n'est pas aussi simple que celui correspondant au cas classique et son jacobien est donc plus difficile à contrôler.

(ii) Dans [42], l'espace d'énergie considéré est

$$\mathcal{E} = \{f \geq 0 \text{ avec } \|f\|_{\mathcal{E}} := \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty} + \||v|^2 f\|_{L^1} < +\infty\}.$$

Sur un tel espace, grâce à l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev [43], les potentiels ϕ_f sont bornés alors que dans \mathcal{E}_p , nous avons seulement

$$\phi_f \in L^q(\mathbb{R}^3) \text{ pour tout } 3 < q \leq \frac{3(4p-3)}{p}$$

et $\frac{3(4p-3)}{p} \in (6, 12)$. Nous perdons donc de la régularité en $r = 0$.

Le premier point est d'autant plus intéressant qu'il soulève une question cruciale à la bonne compréhension des conditions sous-critiques : peut-on construire un profil $Q = F(e)$ en dehors de toute condition sous-critique ? Ou même plus fortement, existe-t-il une fonction f qui ne soit pas sous-critique pour tout espace \mathcal{E}_p ? Laissons ces questions ouvertes et donnons les grandes lignes qui permettent de démontrer le théorème 4.1.

Réduction par rapport à l'énergie microscopique : La démonstration reprend l'idée de rester dans des espaces d'équimesurabilité en utilisant des réarrangements selon l'énergie microscopique, idée déjà développée dans le chapitre précédent. Pour une fonction de distribution f non nulle dans \mathcal{E}_j et pour un potentiel ϕ non nul, similairement au chapitre 2, on définit le jacobien

$$\forall e < 0, \quad a_\phi(e) = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) < e\}$$

et l'unique fonction de l'énergie microscopique $e(x, v) = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x)$ équimesurable à f donnée par

$$f^{*\phi}(x, v) = f^* \circ a_\phi(e(x, v)),$$

où f^* est le réarrangement de Schwarz de f . Alors, le profil stationnaire Q étudié est stable par ce réarrangement, *i.e.*

$$Q = Q^{*\phi_Q}.$$

De plus, pour f non nulle, on a une décroissance du Hamiltonien donnée par

$$\mathcal{H}(f^{*\phi_f}) \leq \mathcal{H}(f).$$

En se plaçant dans l'espace des fonctions équimesurables avec Q , noté $Eq(Q)$, on peut définir une nouvelle fonctionnelle (voir [44]) dépendant uniquement du potentiel

$$J(\phi) := \mathcal{H}(Q^{*\phi}) + \frac{1}{2} \|\nabla \phi_{Q^{*\phi}} - \nabla \phi\|_{L^2}^2,$$

et dont la valeur est inférieure au Hamiltonien

$$\mathcal{H}(Q^{*\phi_f}) \leq J(\phi_f) \leq \mathcal{H}(f).$$

En particulier, puisque Q est stable par ce réarrangement, on a $J(\phi_Q) = \mathcal{H}(Q)$ et dans un cas général

$$\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(Q) \geq J(\phi_f) - J(\phi_Q) + \int_0^{+\infty} a_{\phi_f}^{-1}(s)(f^*(s) - Q^*(s))ds. \quad (4.10)$$

Ainsi, on peut séparer notre problème en deux parties : tout d'abord, nous montrerons la coercivité locale autour de ϕ_Q de la fonctionnelle J . Ensuite, nous conclurons à la stabilité de Q en utilisant la rigidité du flot : plus particulièrement on s'intéressera à la conservation de f^* et à la décroissance de $\mathcal{H}(f)$ au cours du temps.

Coercivité de J autour de ϕ_Q dans le cas radial : Pour obtenir cette coercivité, on cherche un développement de Taylor de J autour de ϕ_Q : cette partie calculatoire est basée sur le changement de variable impliqué par le jacobien a_ϕ et sur l'utilisation de l'équation d'Euler-Lagrange. On obtient ainsi $DJ(\phi_Q)(h) = 0$ et

$$D^2J(\phi_Q)(h, h) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla h|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^6} |F'(e_{\phi_Q}(x, v))| (h(x) - \Pi h(x, v))^2 dx dv, \quad (4.11)$$

où $e_{\phi_Q}(x, v) = \sqrt{1 + |v|^2} - 1 - \phi_Q(x)$ et où la fonction Πh est définie par

$$\Pi h(x, v) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \left((1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y)) h(y) dy}{\int_{\mathbb{R}^3} \left((1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y)) dy}.$$

Cette fonction Πh peut être considérée comme la projection de h sur les fonctions dépendant uniquement de l'énergie microscopique e_{ϕ_Q} . Maintenant, pour obtenir la coercivité de J , il suffit d'avoir celle de l'opérateur

$$\mathcal{L}h = -\Delta h - \int_{\mathbb{R}^3} |F'(e)| (h - \Pi h) dv$$

sur \dot{H}^1 . Plus précisément, en utilisant les résultats de Burchard et Guo [16], nous pouvons nous restreindre au cas radial, c'est-à-dire à des potentiels fonctions de $|x|$. De plus, nous

avons la compacité de la forme quadratique $D^2J(\phi_Q)$ sur \dot{H}_{rad}^1 . Ainsi, d'après l'alternative de Fredholm, il suffit de démontrer la stricte positivité

$$\forall h \in \dot{H}_{rad}^1, h \neq 0, (\mathcal{L}h, h) > 0. \quad (4.12)$$

Dans ce but, nous allons montrer une inégalité de type Hardy en adaptant une preuve de Hörmander [33, 34]. Pour

$$I(h) := \int_{\mathbb{R}^6} |F'(e)|(h - \Pi h)^2 dx dv,$$

où χ_ε sert juste à régulariser. Cette méthode nous amène à

$$I(h) \geq 3 \int \left(\rho_Q(r) + \frac{\phi_Q(r)}{r(1+u^2)} \right) |F'(e)| \frac{f^2}{r^4 u^4 \sqrt{1+u^2}} dx dv, \quad (4.13)$$

avec $u = ((1 + e - \phi(x))_+^2 - 1)_+^{\frac{1}{2}}$. Par intégration par partie et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons de plus :

$$I(h) \leq \|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(3 \int \rho_Q(r) |F'(e)| \frac{f^2}{r^4 u^4 \sqrt{1+u^2}} dx dv \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

En combinant (4.13) et (4.14), nous obtenons une inégalité de type Poincaré

$$I(h) + 3 \int \frac{\phi_Q(r)}{r(1+u^2)} |F'(e)| \frac{f^2}{r^4 u^4 \sqrt{1+u^2}} dx dv \leq \|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (4.15)$$

En remarquant que le cas d'égalité dans (4.15) est obtenu uniquement pour $f = 0$, on en déduit

$$\forall h \in \dot{H}_r^1 \quad D^2J(\phi_Q)(h, h) \geq C_0 \|\nabla h\|_{L^2}^2. \quad (4.16)$$

Ce résultat obtenu pour des potentiels radiaux implique la coercivité locale de J dans le cas général incluant les potentiels non radiaux :

Proposition 4.1. *Il existe $\delta > 0$ telle que la propriété suivante est vérifiée. Soit ϕ_n une suite de potentiels telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \leq \delta, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} J(\phi_n) \leq J(\phi_Q). \quad (4.17)$$

Alors, il existe une suite de translations en espace x_n telle que

$$\|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q(\cdot - x_n)\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.18)$$

Dans le cas radial, cette proposition repose sur le développement de Taylor de J et sur la coercivité (4.16) qui donnent

$$J(\phi_n^\#) - J(\phi_Q) \geq \frac{C_0}{2} \|\nabla \phi_n^\# - \nabla \phi_Q\|_{L^2}^2 + \varepsilon (\|\nabla \phi_n^\# - \nabla \phi_Q\|_{L^2}) \geq \frac{C_0}{4} \|\nabla \phi_n^\# - \nabla \phi_Q\|_{L^2}^2,$$

pour δ assez petit. Notons que $(-\phi_n^\#)$ est le réarrangement de Schwarz de $(-\phi_n)$ pris comme fonction de \mathbb{R}^3 . La proposition 4.1 est donc prouvée dans le cas radial.

Le cas général se démontre grâce au théorème 2 de [16]. Il suffit de remarquer que l'inégalité de Polya-Szegö implique

$$J(\phi_n^\#) - J(\phi_n) = \frac{1}{2} \|\nabla \phi_n^\#\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \phi_n\|_{L^2}^2 \leq 0. \quad (4.19)$$

On peut alors utiliser la proposition 4.1 dans le cas radial. Nous sommes donc dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Polya-Szegö ce qui conduit à la convergence souhaitée.

Compacité locale des suites minimisantes : A partir de la coercivité donnée par la proposition 4.1, nous avons le résultat de compacité suivant.

Proposition 4.2. *Soit $p > \frac{3}{2}$. Soit $\delta > 0$ la constante définie par la proposition 4.1 et soit f_n une suite de \mathcal{E}_p telle que*

$$\|f_n^* - Q^*\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \|f_n^* - Q^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n) \leq \mathcal{H}(Q), \quad (4.20)$$

et

$$\|\nabla \phi_{f_n} - \nabla \phi_Q\|_{L^2} < \delta. \quad (4.21)$$

Alors il existe une suite de translations x_n telle que

$$\|f_n - Q(\cdot - x_n)\|_{\mathcal{E}_p} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.22)$$

La convergence des potentiels provient essentiellement de l'inégalité

$$\mathcal{H}(f_n) - \mathcal{H}(Q) \geq J(\phi_{f_n}) - J(\phi_Q) + \int_0^{+\infty} a_{\phi_f}^{-1}(s)(f_n^*(s) - Q^*(s))ds. \quad (4.23)$$

En effet, on montre tout d'abord que l'intégrale tend vers 0 grâce à

$$\|f_n^* - Q^*\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \|f_n^* - Q^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

Ensuite, on utilise la proposition 4.1 et le contrôle du Hamiltonien, qui, combinés avec (4.23), impliquent la convergence

$$\|\nabla \phi_{f_n}(\cdot - x_n) - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

On renote $f_n = f_n(\cdot - x_n, \cdot)$. Afin de démontrer la convergence forte dans \mathcal{E}_p on s'intéresse de nouveau au Hamiltonien qui vérifie

$$\mathcal{H}(f_n) = \mathcal{H}(Q) + \frac{1}{2} \|\nabla \phi_{f_n} - \nabla \phi_Q\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) (f_n - Q) dx dv,$$

à la translation x_n près. La positivité du terme intégral découle d'une propriété de réarrangement ainsi que de la convergence

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) (f_n^{\phi_Q} - Q) dx dv \rightarrow 0. \quad (4.24)$$

Cette dernière provient de la convergence de f_n^* . Ainsi, en utilisant le contrôle du Hamiltonien et la convergence du champ de force $\nabla\phi_{f_n}$, on obtient la convergence

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) (f_n - Q) dx dv \rightarrow 0. \quad (4.25)$$

On arrive alors à la convergence

$$\|f_n - Q\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty, \quad (4.26)$$

par des techniques basées sur l'équimesurabilité. La convergence dans L^p s'obtient en utilisant la convergence presque partout de f_n et la conservation de l'entropie à la limite. Enfin, le contrôle du Hamiltonien donne le contrôle de l'énergie cinétique et implique donc la convergence

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} \right) |f_n - Q| dx dv \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. La compacité est ainsi démontrée.

Stabilité : Pour passer de la compacité à la stabilité non-linéaire remarquons tout d'abord que la proposition 4.2 peut se réécrire de la forme suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $f \in \mathcal{E}_p$ vérifie

$$\|f^* - Q^*\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \eta, \quad \|f^* - Q^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \eta, \quad \mathcal{H}(f) \leq \mathcal{H}(Q) + \eta, \quad (4.27)$$

et

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^3} \|\nabla\phi_f(\cdot + z) - \nabla\phi_Q\|_{L^2} < \delta. \quad (4.28)$$

alors il existe une translation $y \in \mathbb{R}^3$ telle que

$$\|f - Q(\cdot - y)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon. \quad (4.29)$$

Par la rigidité du flot la condition (4.27) est toujours satisfaite dès lors que l'état initial f_0 la vérifie. On montre que la condition (4.28) est toujours respectée en procédant par l'absurde : si ce n'est pas le cas, en remarquant que la fonction

$$\beta : t \mapsto \inf_{z \in \mathbb{R}^3} \|\nabla\phi_{f(t)}(\cdot + z) - \nabla\phi_Q\|_{L^2}$$

est continue, cette fonction atteint donc des valeurs entre $\delta/2$ et δ . Or en prenant, ε assez petit, on peut montrer que le contrôle (4.29) implique

$$\|\nabla\phi_f(\cdot - y) - \nabla\phi_Q\|_{L^2} < \frac{\delta}{2}$$

et on a donc une contradiction. La stabilité est démontrée.

5 Etude numérique de l'équation radiale de Vlasov-Poisson

5.1 Présentation générale

Dans le chapitre 4 introduit ici, nous nous proposons de développer des schémas numériques conservatifs pour le système de Vlasov-Poisson radial. Ceci a pour but futur, dans un premier temps, de valider numériquement les résultats connus sur cette équation cinétique et, dans un second temps, de nous faire une idée sur des problèmes encore ouverts. On pense notamment à la question de la stabilité asymptotique autour de solutions stationnaires et au possible amortissement Landau.

On s'intéresse ici à l'équation de Vlasov-Poisson non relativiste en dimension 3. Cependant on se restreint au cas radial. Se ramener aux trois variables $|x|$, $|v|$ et $x \cdot v$ permet d'alléger considérablement l'étude numérique du système. Le cas général avec 6 variables (3 d'espace et 3 de vitesse) demanderait encore aujourd'hui un calcul trop lourd à effectuer.

De plus, réduire le problème au cas radial n'enlève en rien l'intérêt d'une telle étude. En effet, à notre connaissance, les résultats de stabilité existants concernent uniquement des solutions stationnaires à symétrie sphérique (à une translation en espace près).

Maintenant donnons l'expression de notre équation en coordonnées radiales $(r, u, s) = (|x|, |v|, x \cdot v)$:

$$\partial_t f + \frac{s}{r} \partial_r f - \frac{s}{ru} \phi'_f(r) \partial_u f + (u^2 - r \phi'_f(r)) \partial_s f = 0, \quad (t, r, u, s) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega_1, \quad (5.1)$$

où $\Omega_1 = \{(r, u, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, |s| \leq ru\}$ et

$$\phi'_f(r) = \frac{1}{r^2} \int_{\tilde{r} < r} \tilde{r}^2 \rho_f(\tilde{r}) d\tilde{r} \quad \text{et} \quad \rho_f(r) = \frac{2\pi}{r} \int_{u>0, |s|<ru} f(r, u, s) u du ds.$$

Notons que cette équation peut être réécrite sous différents systèmes de variables et que chacun de ces systèmes présente des avantages et des inconvénients. En les variables (r, u, s) le domaine est mal adapté à une discrétisation. Nous préférons utiliser le système de variables $(r, u, l) = (sgn(x \cdot v)|x|, |v|, |x \wedge v|)$. Pour $(r, u, l) \in \Omega$ avec

$$\Omega = \{(r, u, l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, l \leq |r|u\}$$

l'équation de Vlasov-Poisson s'écrit alors

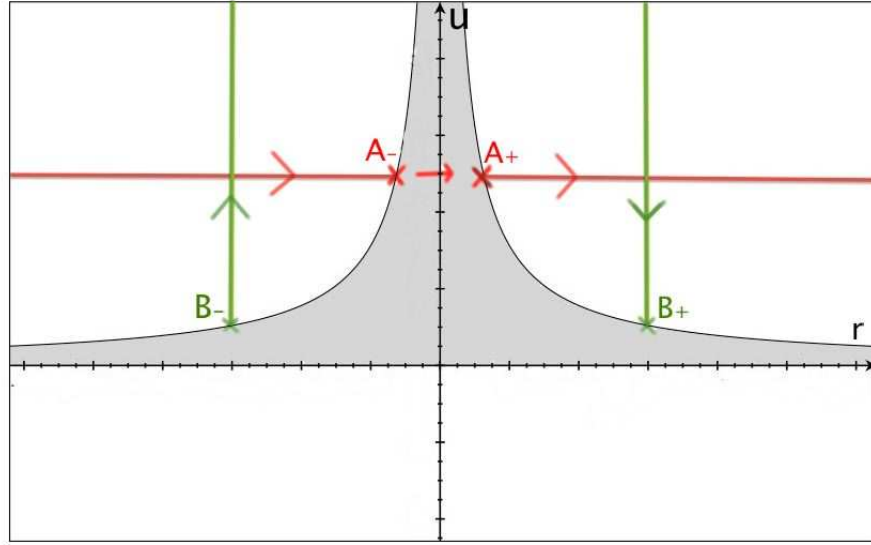
$$\partial_t f + u \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_r f - \phi'_f(r) \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_u f = 0, \quad (5.2)$$

où le champ de force ϕ'_f est défini par

$$\phi'_f(r) = \frac{1}{r^2} \int_{-|r|}^{|r|} \tilde{r}^2 \rho_f(\tilde{r}) d\tilde{r}$$

et la densité par

$$\rho_f(r) = \frac{2\pi}{r^2} \int_{u>0, l<|r|u} \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}}} f(r, u, l) du dl. \quad (5.3)$$

FIGURE 1 – Domaine d'étude et sens de transport à $l > 0$ fixé

Ce système présente deux difficultés. La première est son domaine de définition, similaire à celui correspondant aux variables (r, u, s) . La seconde difficulté est la singularité en $\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}}$ présente dans l'expression de ρ_f . La forme du domaine, à l fixé, est donnée par la figure 1. Celle-ci représente le sens du transport dans le plan $\{l = \text{constante}\}$ dans chacune des directions, en espace pour la ligne rouge et en vitesse pour la ligne verte. Se placer sur ce type de plan n'est pas anodin : ce sont des plans caractéristiques de l'équation de Vlasov-Poisson. C'est pourquoi on a préféré cette formulation à celle résultant des variables (r, u, s) . De plus, notons que la figure 1 schématise les conditions au bord à respecter : d'une part, la continuité de la fonction de distribution f d'un bord à l'autre

$$f(-r, u, l = ru) = f(r, u, l = ru) \quad (5.4)$$

et, d'autre part, la conservation de la masse lors de son passage d'un bord à l'autre donnée par

$$\lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \nabla f(-r, u, l) \cdot \mathbf{n}_+ = - \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \nabla f(r, u, l) \cdot \mathbf{n}_-, \quad (5.5)$$

où \mathbf{n}_+ et \mathbf{n}_- sont les normales sortantes du domaine Ω respectivement en $r = l/u$ et en $r = -l/u$. Remarquons que, théoriquement, le passage des coordonnées naturelles (r, u, s) aux coordonnées (r, u, l) préserve la continuité mais peut entraîner une explosion des dérivées partielles sur le bord du domaine, explosion en $\left(1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}\right)^{-1/2}$.

5.2 Etude numérique

On se propose ici de résoudre numériquement l'équation (5.1) en utilisant des méthodes de différences finies. On souhaite ainsi préserver à chaque itération la masse et le Hamiltonien. On considère donc un schéma numérique du type

$$D_t f^n = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = -[u]_{u_i} \alpha_{k,i,j} D_r f^n + [\phi'_{f^n}]_{r_k} \alpha_{k,i,j} D_u f^n, \quad (5.6)$$

pour une discrétisation classique (t_n, r_k, u_i, l_j) de pas Δt , Δr , Δu et Δl_j . Remarquons qu'on affine la discrétisation pour l proche de $l = 0$ et qu'ainsi le pas Δl_j dépend de l_j . Tout d'abord, nous traitons la singularité présente dans l'expression de ρ_n^k en approchant

$$\int_{l_{j-1/2}}^{l_{j+1/2}} \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r_k^2 u_i^2}}} f(r, u, l) dl \simeq m_{k,i,j} f(r, u, l_j)$$

où

$$m_{k,i,j} = r_k^2 u_i^2 \left(\sqrt{1 - \frac{l_{j-1/2}^2}{r_k^2 u_i^2}} - \sqrt{1 - \frac{l_{j+1/2}^2}{r_k^2 u_i^2}} \right).$$

Avec de telles notations, la masse est définie par

$$M^n = 4\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_k^2 \rho_k^n \Delta r = 8\pi^2 \sum_{\substack{k,i,j \\ |r_k| u_i > l_j}} m_{k,i,j} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u. \quad (5.7)$$

Lemme 5.1. *La masse (5.7) est conservée par le schéma (5.6) si les opérateurs de différences finies D_r et D_u satisfont pour tout (k, i, j)*

$$\begin{cases} D_r^* (\alpha_{k,i,j} m_{k,i,j} [u]_i) = 0. \\ D_u^* (\alpha_{k,i,j} m_{k,i,j}) = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Remarquons qu'on laisse le terme $[u]_i$ dans les conditions (5.8) car on le définit comme pouvant dépendre de r_k et plus précisément de son signe. Cette dépendance sera utile pour la conservation du Hamiltonien.

Pour réaliser le lemme 5.1 il suffit d'avoir

$$D_r^*(1) = 0 \quad \text{et} \quad D_u^*(1) = 0,$$

de considérer $[u]_i = u_i$ indépendant du signe de r_k et que le facteur $\alpha_{k,i,j} m_{k,i,j}$ soit indépendant de i et de k .

Nous nous intéressons maintenant à la conservation du Hamiltonien. Nous avons alors le lemme suivant.

Lemme 5.2. *Soit une distribution f^n satisfaisant (5.6). Supposons que la condition de conservation de la masse (5.8) est vérifiée. Alors si les conditions suivantes sont respectées*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k > 1, E_k^n = \tilde{E}_k^n + \tilde{E}_{-k}^n \text{ et } E_1^n = \tilde{E}_1^n = \rho_k^1, \\ \text{avec } \forall k \in \mathbb{Z}^*, D_{r_k}(r_k^2 \tilde{E}_k^n) = r_k^2 \rho_k^n, \\ \forall k > 0, E_{-k}^n = -E_k^n, \\ \forall i > 0, (D_{u_i}^{sgn(k)})^*(u^2) = -2[u]_{i,sgn(k)}, \\ \forall k \neq 0, [\phi'_{f^n}]_{r_k} = \frac{E_k^{n+1} + E_k^n}{2}, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

le Hamiltonien H^n défini par

$$H^n = 8\pi^2 \sum_{\substack{k,i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} m_{k,i,j} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u - 4\pi \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^2 (E_k^n)^2 \Delta r. \quad (5.10)$$

est conservé.

Compte tenu du sens de transport, nous sommes obligés de considérer un opérateur D_u dépendant du signe de r_k . Ainsi pour respecter les conditions (5.9) nous devons aussi prendre $[u]_{i,sgn(k)}$ fonction de $sgn(k)$. Ceci pose problème pour obtenir les conditions de conservation de la masse (5.8) près du bord.

On ne proposera ainsi qu'un schéma conservatif à une distance du bord singulier. Ce schéma satisfait le lemme 5.2 en dehors de la frontière.

Remarquons que, par cette méthode, on calcule f^{n+1} en particulier à partir du champ de force E^{n+1} . Ceci ne pose pas de problème car nous pouvons quantifier les variations $D_t(E^n)$ uniquement à partir de f^n . Ce résultat découle directement de l'équation de Poisson et il s'écrit :

$$D_t(r_k^2 E_k^n) = -2\pi \sum_{\substack{i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} l_j \left([u]_{u_i}^{sgn(k)} f_{k,i,j}^n - [u]_{u_i}^{sgn(-k)} f_{-k,i,j}^n \right) \Delta u \Delta l_j. \quad (5.11)$$

On pourra trouver dans le chapitre 4 deux exemples de schémas numériques impliquant ces conservations pour des fonctions nulles près du bord. Cependant, donner un schéma conservatif près du bord paraît beaucoup moins aisé. De plus, on montrera numériquement qu'obtenir la stabilité et la consistance du schéma près du bord est difficile.

Pour terminer cette partie numérique, nous faisons une simple approche à l'étude numérique du comportement de fonctions proches d'un état stationnaire. En utilisant l'équation de Poisson, un état stationnaire de la forme

$$Q(r, u) = C \left(-1 - \frac{u^2}{2} - \phi_Q(r) \right)_+^{\frac{1}{p-1}}, \quad (5.12)$$

peut être mis en évidence numériquement. Leur existence a été prouvée pour $p > 9/7$ [38]. En choisissant bien C et en prenant $p = 3$, on se ramène à l'équation

$$r^2 \phi_Q'' + 2r \phi_Q' = (-1 - \phi_Q(r))_+^2.$$

La condition $\phi_Q'(0) = 0$ et le fait que ϕ_Q tende vers 0 à l'infini permettent d'avoir l'unicité de cette solution. Après l'avoir trouvée numériquement, il suffit de choisir une perturbation de cet état stationnaire s'écrivant

$$f_0(r, u, s) = \frac{2}{\pi^2 \sqrt{2}} \left(-1 - \frac{u^2}{2} - \phi_Q(r) - b\chi(r)s \right)_+^{\frac{1}{2}},$$

où b est une petite constante et $\chi(r)$ une fonction régulière bornée à support compact.

Pour les schémas développés dans le chapitre 4, mettre en évidence le comportement asymptotique d'une telle perturbation n'est pas envisageable sans des calculs trop lourds. Cependant, en prenant des opérateurs d'ordre supérieur cela semble tout à fait possible et sera l'objet d'une future étude.

Chapitre 1

Stable ground states for the Vlasov-Manev system

N.B. : Les chapitres 1 et 2 font l'objet d'une publication commune à paraître dans SIMA, SIAM Journal of Mathematical Analysis. Ce travail a été fait en collaboration avec Mohammed Lemou et Florian Méhats.

Abstract: In this chapter, we study the orbital stability of steady states to the so-called Vlasov-Manev (VM) system. This system is a kinetic model which has a similar Vlasov structure as the classical Vlasov-Poisson system, but is coupled to a potential in $-1/r - 1/r^2$ (Manev potential) instead of the usual gravitational potential in $-1/r$, and in particular the potential field does not satisfy a Poisson equation but a fractional-Laplacian equation. We first prove the orbital stability of the ground states type solutions which are constructed as minimizers of the Hamiltonian, following the classical strategy: compactness of the minimizing sequences and the rigidity of the flow. However, in driving this analysis, there are two mathematical obstacles: the first one is related to the possible blow-up of solutions to the VM system, which we overcome by imposing a sub-critical condition on the constraints of the variational problem. The second difficulty (and the most important) is related to the nature of the Euler-Lagrange equations (fractional-Laplacian equations) to which classical results for the Poisson equation do not extend. We overcome this difficulty by proving the uniqueness of the minimizer under equimeasurability constraints, using only the regularity of the potential and not the fractional-Laplacian Euler-Lagrange equations itself.

1.1 Introduction and main results

In this paper, we study the stability of steady states and the existence of blow-up self-similar solutions to the Vlasov-Manev (VM) model for gravitational systems. In this mean

field kinetic model, the usual Newtonian interaction potential is replaced by the so-called Manev potential. This potential corrects the Newtonian gravitational potential as follows:

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} - \frac{\kappa}{2\pi^2|x|^2},$$

where κ is a positive constant. First it was studied by Manev in the 1920' as an alternative way of Einstein's relativity to explain the advance of the perihelion of Mercury unexplained by Newton's laws [48, 49, 50, 51]. And recently, frustrated by the unsuccess of the relativity model to formulate a meaningful relativistic n-body problem, F. Diacu, A. Mingarelli, V. Mioc and C. Stoica [6] followed by R. Illner, H.D. Victory, P.Dukes and A.V. Bobylev [2-3] gave the basics for the comeback of the Manev model, described by the first ones as *a fairly good substitute of relativity within the frame of classical mechanics*.

We then consider in this paper the case of a potential given by:

$$U(x) = -\frac{\delta}{4\pi|x|} - \frac{\kappa}{2\pi^2|x|^2},$$

where δ is a nonnegative constant. Further physical studies of this potential can be found in [18]. The case $\delta = 0$, $\kappa = 1$ will be referred to as the *pure Manev case*. The case $\delta > 0$, $\kappa \geq 0$ will be referred to as *the Poisson-Manev case* which includes the Newtonian case $\delta = 1$, $\kappa = 0$. Note that at the limit $\delta \rightarrow 1$ and $\kappa \rightarrow 0$, we recover the stability of steady states proved in [38, 40].

Taking into account this correction, the standard Vlasov-Poisson system is replaced by the following Vlasov-Manev system:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t = 0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

in which $f = f(t, x, v) \geq 0$ is a distribution function and ϕ_f the associated potential defined as follows. We have

$$\phi_f(t, x) = \delta \phi_f^P + \kappa \phi_f^M, \quad (1.1.2)$$

where ϕ_f^P and ϕ_f^M are respectively the Poisson potential and the Manev potential of f given by:

$$\phi_f^P(t, x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{4\pi|x-y|} dy, \quad \phi_f^M(t, x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{2\pi^2|x-y|^2} dy, \quad (1.1.3)$$

ρ_f being the density associated with the distribution function f :

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv.$$

Note that the two potentials satisfy

$$\Delta \phi_f^P = \rho_f \quad \text{and} \quad (-\Delta)^{1/2} \phi_f^M = -\rho_f,$$

and in particular the system (1.1.1) reduces to the well-known gravitational Vlasov-Poisson system in the case $\delta = 1$ and $\kappa = 0$.

To our knowledge, the only existing mathematical analysis of the Vlasov-Manev model is due to Bobylev, Dukes, Illner and Victory [13, 14]. In these works, the local existence of regular solutions is proved and some questions of global existence and finite-time blow-up are discussed.

We now give some basic properties of the Vlasov-Manev system (1.1.1). Sufficiently regular solutions to (1.1.1) on a time interval $[0, T]$ satisfy the conservation of the so-called Casimir functionals:

$$\forall t \in [0, T], \quad \|j(f(t))\|_{L^1} = \|j(f_0)\|_{L^1} \quad (1.1.4)$$

and the conservation of the Hamiltonian

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathcal{H}(f(t)) = \mathcal{H}(f_0),$$

where j is any smooth real-valued function with $j(0) = 0$, and where

$$\mathcal{H}(f(t)) = \| |v|^2 f(t) \|_{L^1} - E_{pot}(f(t)). \quad (1.1.5)$$

The potential energy E_{pot} is defined by

$$E_{pot}(f(t)) = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_f(t, x) \rho_f(t, x) dx = \delta E_{pot}^P(f(t)) + \kappa E_{pot}^M(f(t)),$$

where we have denoted

$$E_{pot}^P(f(t)) = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_f^P(t, x) \rho_f(t, x) dx \quad \text{and} \quad E_{pot}^M(f(t)) = - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_f^M(t, x) \rho_f(t, x) dx.$$

These potential energies are controlled thanks to standard interpolation inequalities:

$$0 \leq E_{pot}^P(f) \leq C_1 \| |v|^2 f \|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \| f \|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \| f \|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}}, \quad (1.1.6)$$

$$0 \leq E_{pot}^M(f) \leq C_2 \| |v|^2 f \|_{L^1} \| f \|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \| f \|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}}, \quad (1.1.7)$$

for all $p \geq 3$.

Our aim in this paper is to prove the orbital stability of ground states type stationary solutions to the Vlasov-Manev problem. While the question of non linear stability has not been studied in the past for the VM system, it has attracted considerable attention in the case of the Vlasov-Poisson system ($\kappa = 0$), both in physics (see [3, 4], [9] and the references therein) and mathematics community [61, 24, 28, 29, 38, 57, 41]. We emphasize that the structure of the equation in the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$) can be compared in some sense with the Vlasov-Poisson system in dimension 4 (see [38]). In this case, we shall construct ground states by minimizing the constant in the interpolation inequality (1.1.7), following the standard strategy as in the case of nonlinear Schrödinger equation [60].

On the other hand, as already noticed in [13], the case of the general VM system ($\delta > 0$) shares similar mathematical properties with the relativistic Vlasov-Poisson system [40]. In [40], the stability of steady state solutions to the relativistic Vlasov-Poisson equation is proved by minimizing the energy and by using a homogeneity-breaking property which comes from the fact that the relativistic kinetic energy is a non-homogeneous velocity moment of the distribution function. In the present case of VM system, the homogeneity-breaking comes from the presence of two contributions in the general VM potential with different homogenities. This homogeneity-breaking property makes possible to build a well-posed variational problem where a sub-critical condition is imposed on the constraints. Notice that the subcritical condition for the well-posedness of the variational problem in the context of the relativistic Vlasov-Poisson system was also observed in [37]. In driving the classical approach in a similar way as in [40] and [38], a new important difficulty appears. This difficulty is related to the nature of the Euler-Lagrange equations to which classical results for the Poisson equation do not extend. In the classical VP case, a complete stability result is generally obtained by using both the Euler-Lagrange equation (which is equivalent to a non linear Poisson equation) and the rigidity of the flow. In the present case, the Euler-Lagrange equation is a fractional-Laplacian equation, and this prevents from using ODE techniques. Nevertheless, we prove the uniqueness of the minimizer under equimeasurable constraints by a new argument which completely avoids ODE techniques.

In order to state our main results, let us make precise our assumptions. Consider a function $j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfying the following hypotheses.

(H1) j is a \mathcal{C}^2 function, with $j(0) = j'(0) = 0$ and such that $j''(t) > 0$ for $t > 0$.

(H2) There exist $p, q > 3$ such that

$$p \leq \frac{tj'(t)}{j(t)} \leq q, \quad \forall t > 0. \quad (1.1.8)$$

We note that (H2) is equivalent to the nondichotomy condition:

$$b^p j(t) \leq j(bt) \leq b^q j(t), \quad \forall b \geq 1, t \geq 0. \quad (1.1.9)$$

For a function j satisfying (H1) and (H2), we define the corresponding energy space

$$\mathcal{E}_j = \{f \geq 0 \text{ such that } \|f\|_{\mathcal{E}_j} := \|f\|_{L^1} + \|j(f)\|_{L^1} + \||v|^2 f\|_{L^1} < +\infty\} \quad (1.1.10)$$

and we shall say that a sequence f_n converges to f in \mathcal{E}_j if

$$\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad \|j(f_n - f)\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \||v|^2(f_n - f)\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

From the interpolation inequality (1.1.7), the following constant is strictly positive:

$$K_j^M = \inf_{f \in \mathcal{E}_j \setminus \{0\}} K_j^M(f) \quad \text{with} \quad K_j^M(f) = \frac{\||v|^2 f\|_{L^1} \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f + j(f)\|_{L^1}^{\frac{2}{3(p-1)}}}{E_{pot}^M(f)}. \quad (1.1.11)$$

Indeed, from (1.1.9) one has $t + j(t) \geq Ct^p$ for all $t \geq 0$.

In our first result, we establish the existence of ground states for the Vlasov-Manev problem.

Theorem 1.1.1 (Existence of ground states). *Let j be a function satisfying (H1) and (H2).*

(i) Poisson-Manev case ($\delta > 0$). *Let $M_1 > 0$, $M_j > 0$ such that*

$$\kappa M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} (M_1 + M_j)^{\frac{2}{3(p-1)}} < K_j^M, \quad (1.1.12)$$

where K_j^M is defined by (1.1.11), and let

$$\mathcal{F}(M_1, M_j) = \{f \in \mathcal{E}_j, \|f\|_{L^1} = M_1, \|j(f)\|_{L^1} = M_j\}.$$

Then there exists a steady state of (1.1.1) which minimizes the variational problem

$$I(M_1, M_j) = \inf_{f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)} \mathcal{H}(f), \quad (1.1.13)$$

where \mathcal{H} is the Hamiltonian defined by (1.1.5).

(ii) Pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$). *For all $M_1, M_j > 0$, the following variational problem*

$$J(M_1, M_j) = \inf_{f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)} K(f), \quad \text{with } K(f) := \frac{\| |v|^2 f \|_{L^1}}{E_{\text{pot}}^M(f)}. \quad (1.1.14)$$

admits a minimizer. Furthermore, for any given $M_1 > 0$, there exists a unique $M_j > 0$ such that $J(M_1, M_j) = 1$. Moreover, the minimizers of (1.1.14) are steady states to (1.1.1) if, and only if $J(M_1, M_j) = 1$.

(iii) *In both cases ($\delta \geq 0$), any steady state Q obtained as a minimizer of (1.1.13) or (1.1.14) is continuous, compactly supported and takes the form*

$$Q(x, v) = (j')^{-1} \left(\frac{\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) - \lambda}{\mu} \right)_+ \quad (1.1.15)$$

where λ and μ are negative constants. Moreover, $\phi_Q(x)$ is spherically symmetric (up to a translation shift), increasing and belongs to $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, for all $\alpha \in (0, 1)$. In (1.1.15), we used the notation $a_+ = \max(a, 0)$.

Notice that in the case $\delta = 1$ and $\kappa = 0$, the condition (3.1.10) is always satisfied. In this case, the Vlasov-Manev system (1.1.1) is nothing but the classical Vlasov-Poisson system, for which it is already known that minimizers of the two constraints problem (1.1.13) always exist and that the minimizing sequences are compact, see [38]. In [40], the orbital stability in the case of the VP system has been proved thanks to a uniqueness result of these minimizers which was based on a combination of the Poisson equation and the rigidity of the flow.

Our second main result concerns the orbital stability of the above constructed ground states under the action of the Vlasov-Manev flow. As in [40], the proof of these stability results needs in a crucial way the uniqueness of the minimizer under some flow constraints (namely the equimeasurability property). However in [40], the proof of this uniqueness

was based on the use of the Poisson equation satisfied by the minimizer. Here, the Euler-Lagrange equation is a fractional Laplacian equation and the proof of [40] cannot be used. In fact, we prove this uniqueness result in a way that completely avoids the use of the Euler-Lagrange equation, and in particular, this generalizes also the uniqueness result obtained in [40]. The only property of the minimizers that we use is their equimeasurability. In particular, our proof avoids the usual ODE techniques, which in fact, are useless here since the Euler-Lagrange equation is a fractional-Laplacian equation.

Lemma 1.1.2 (Uniqueness of the minimizer under equimeasurability condition). *Let $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, strictly decreasing on \mathbb{R}_- , such that $F(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$ and $F(\mathbb{R}_+) = \{0\}$. We define*

$$Q_0(x, v) = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \psi_0(x)\right), \quad Q_1(x, v) = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \psi_1(x)\right)$$

on $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, where ψ_0 and ψ_1 are two nondecreasing continuous radially symmetric potentials such that the sets $\{x \in \mathbb{R}^3, \psi_0(x) < 0\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^3, \psi_1(x) < 0\}$ are bounded. Then the equimeasurability of Q_0 and Q_1 for the Lebesgue measure in \mathbb{R}^6 , i.e.

$$\forall t > 0, \text{ meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, Q_0(x, v) > t\} = \text{ meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, Q_1(x, v) > t\}, \quad (1.1.16)$$

implies that $Q_0 = Q_1$. In particular:

- (i) Poisson-Manev case ($\delta \neq 0$): *two equimeasurable steady states of (1.1.1) which minimize (1.1.13) under the subcritical condition (1.1.12) are equal up to a translation in space.*
- (ii) Pure Manev case ($\delta = 0, \kappa = 1$): *two equimeasurable steady states of (1.1.1) which minimize (1.1.14) and which have the same kinetic energy are equal up to a translation shift in space.*

Now, using the compactness of all the minimizing sequences of (1.1.13) and (1.1.14) (which will be proved) and the uniqueness result stated in Lemma 1.1.2 we get the desired stability results.

Theorem 1.1.3 (Orbital stability of ground states).

- (i) Poisson-Manev case ($\delta > 0$). *Let $M_1, M_j > 0$ satisfy the subcritical condition (1.1.12). Then any steady state Q of (1.1.1) which minimizes (1.1.13) is orbitally stable under the flow (1.1.1). More precisely, given $\varepsilon > 0$, there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that the following holds true. Consider f_0 a smooth function with $\|f_0 - Q\|_{\varepsilon_j} \leq \delta(\varepsilon)$, and let $f(t)$ be a classical solution to (1.1.1) on a time interval $[0, T)$, $0 < T \leq +\infty$, with initial data f_0 . Then there exists a translation shift $x(t) \in \mathbb{R}^3$ such that, for all $t \in [0, T)$, we have*

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q\|_{\varepsilon_j} < \varepsilon.$$

- (ii) Pure Manev case ($\delta = 0, \kappa = 1$). *Let Q be a steady state of (1.1.1) which minimizes (1.1.14). Then for all $\varepsilon > 0$, there exists a constant $\delta(\varepsilon) > 0$ such that the following property holds true. Let $f(t)$ be a classical solution to (1.1.1) on a time interval $[0, T)$, $0 < T \leq +\infty$, with initial data f_0 , satisfying:*

$$(a) \|f_0 - Q\|_{L^1} \leq \delta(\varepsilon) \text{ and } \|j(f_0)\|_{L^1} \leq \|j(Q)\|_{L^1} + \delta(\varepsilon),$$

$$(b) \forall t \in [0, T), \quad \lambda(t)^2 \mathcal{H}(f(t)) < \delta(\varepsilon) \quad \text{where } \lambda(t) = \left(\frac{\| |v|^2 Q \|_{L^1}}{\| |v|^2 f(t) \|_{L^1}} \right)^{1/2}.$$

Then there exists a translation shift $x(t) \in \mathbb{R}^3$ such that, for all $t \in [0, T)$, we have

$$\left\| f \left(t, \lambda(t)(x + x(t)), \frac{v}{\lambda(t)} \right) - Q \right\|_{\varepsilon_j} < \varepsilon.$$

Remark 1.1.4. The goal here is to prove this stability result assuming the framework of classical solutions to the Vlasov-Manev model, and not to solve the Cauchy problem. For smooth initial data decaying fast enough at the infinity, the local existence and the uniqueness of regular solutions to (1.1.1) has been proved in [14]. The global existence of classical solutions is an open problem. Our result shows that the solutions remain in the vicinity of the ground state Q (up to a translation shift), but does not a priori exclude a possible blow-up of some derivative of f .

The outline of this chapter is as follows. Section 1.2 deals with the proof of Theorem 1.1.1. After preliminary technical results concerning some properties of the infimum $I(M_1, M_j)$ (Subsection 1.2.1), we prove in Subsection 1.2.2 the existence of minimizers. Then we characterize the ground states: Euler-Lagrange equation, regularity and spherical symmetry. Section 1.3 is devoted to the proof of stability of the ground state through the Vlasov-Manev flow as stated in Theorem 1.1.3. First, in Subsection 1.3.1, we prove the uniqueness of the ground state in the class of equimeasurable functions, Lemma 1.1.2. Then we use standard concentration-compactness arguments to prove the compactness of minimizing sequences. Combining the uniqueness and compactness properties, we finally deduce the orbital stability result, Theorem 1.1.3.

1.2 Existence of ground states

This section is devoted to the proof of Theorem 1.1.1.

1.2.1 Properties of the infimum

In this section, we prove two lemmas concerning some monotonicity properties of the infimum defined by (1.1.13) and by (1.1.14).

Lemma 1.2.1 (Monotonicity properties of the infimum $I(M_1, M_j)$). *Let j be a real-valued function satisfying Assumptions (H1) and (H2), let $M_1 > 0$ and $M_j > 0$ such that (1.1.12) holds, and let $I(M_1, M_j)$ be defined by (1.1.13) in the case $\delta > 0$. Then we have*

$$-\infty < I(M_1, M_j) < 0. \tag{1.2.1}$$

Moreover the following nondichotomy condition holds true: for all $0 < \alpha < 1$ and $0 \leq \beta \leq 1$,

$$I(\alpha M_1, \beta M_j) + I((1 - \alpha)M_1, (1 - \beta)M_j) > I(M_1, M_j). \tag{1.2.2}$$

Proof. Step 1. The infimum is finite and negative.

We first prove (1.2.1). Let $f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)$. Then from (1.1.6) and (1.1.11), we have

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &\geq \| |v|^2 f \|_{L^1} - \frac{\kappa}{K_j^M} \| |v|^2 f \|_{L^1} M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} (M_1 + M_j)^{\frac{2}{3(p-1)}} \\ &\quad - C\delta \| |v|^2 f \|_{L^1}^{1/2} M_1^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} (M_1 + M_j)^{\frac{1}{3(p-1)}} \\ &\geq \| |v|^2 f \|_{L^1} \left(1 - \frac{\kappa}{K_j^M} M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} (M_1 + M_j)^{\frac{2}{3(p-1)}} \right) - C_{M_1, M_j} \| |v|^2 f \|_{L^1}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Now the subcritical condition (1.1.12) implies that

$$1 - \frac{\kappa}{K_j^M} M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} (M_1 + M_j)^{\frac{2}{3(p-1)}} > 0.$$

Thus $\mathcal{H}(f)$ is bounded from below, which proves that $I(M_1, M_j)$ is finite. To prove that $I(M_1, M_j)$ is negative, we use a rescaling argument. For $\lambda > 0$ and $f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)$, we consider the rescaled function $\tilde{f}(x, v) = f(\frac{x}{\lambda}, \lambda v)$. Then \tilde{f} belongs to $\mathcal{F}(M_1, M_j)$ and we have (see Appendix A)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tilde{f}) &= \frac{1}{\lambda^2} \| |v|^2 f \|_{L^1} - \frac{\delta}{\lambda} E_{pot}^P(f) - \frac{\kappa}{\lambda^2} E_{pot}^M(f) \\ &\sim -\frac{1}{\lambda} E_{pot}^P(f) \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

where $E_{pot}^P(f)$ is positive (since f is not zero). The property (1.2.1) follows.

Step 2. The nondichotomy condition.

We now claim the following monotonicity properties: for all $0 < k \leq 1$,

$$I(M_1, kM_j) \geq k^{\frac{1}{3(q-1)}} I(M_1, M_j) \quad (1.2.4)$$

and

$$I(kM_1, M_j) \geq k^{\frac{4p-6}{3(p-1)}} I(M_1, M_j). \quad (1.2.5)$$

Proof of (1.2.4). Let $k \in (0, 1]$ and $f \in \mathcal{F}(M_1, kM_j)$. From Appendix 1.4.1, consider the unique rescaled function $\tilde{f}(x, v) = \alpha f(\alpha^{1/3}x, v)$ in $\mathcal{F}(M_1, M_j)$. From (1.4.2), we deduce in particular that $\alpha \geq 1$ and that

$$\alpha^{p-1} \leq \frac{1}{k} \leq \alpha^{q-1}.$$

Then, we get

$$\mathcal{H}(\tilde{f}) = \| |v|^2 f \|_{L^1} - \alpha^{\frac{1}{3}} \delta E_{pot}^P(f) - \alpha^{\frac{2}{3}} \kappa E_{pot}^M(f) \leq \| |v|^2 f \|_{L^1} - \alpha^{\frac{1}{3}} (\delta E_{pot}^P(f) + \kappa E_{pot}^M(f))$$

and

$$I(M_1, M_j) \leq \mathcal{H}(\tilde{f}) \leq \| |v|^2 f \|_{L^1} - \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{3(q-1)}} (\delta E_{pot}^P(f) + \kappa E_{pot}^M(f)) \leq \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{3(q-1)}} \mathcal{H}(f).$$

This result holds for all $f \in \mathcal{F}(M_1, kM_j)$ and $k \in (0, 1]$, which proves (1.2.4).

Proof of (1.2.5). Similarly, we take $f \in \mathcal{F}(kM_1, M_j)$ and set

$$\tilde{f}(x, v) = \alpha f(\alpha^{1/3} k^{1/3} x, v)$$

the unique rescaled function in $\mathcal{F}(M_1, M_j)$, which implies that $\alpha \leq 1$ with

$$\alpha^{q-1} \leq k \leq \alpha^{p-1}.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tilde{f}) &= \frac{1}{k} \| |v|^2 f \|_{L^1} - \alpha^{\frac{1}{3}} k^{-5/3} \delta E_{pot}^P(f) - \alpha^{\frac{2}{3}} k^{-4/3} \kappa E_{pot}^M(f) \\ &\leq \frac{1}{k} \| |v|^2 f \|_{L^1} - \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{5p-6}{3(p-1)}} \delta E_{pot}^P(f) - \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{4p-6}{3(p-1)}} \kappa E_{pot}^M(f). \end{aligned}$$

From $k \leq 1$ and $p > 3$, we conclude that

$$I(M_1, M_j) \leq \mathcal{H}(\tilde{f}) \leq \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{4p-6}{3(p-1)}} \mathcal{H}(f),$$

and (1.2.5) follows.

We now prove (1.2.2). Let $0 < \alpha < 1$ and $0 \leq \beta \leq 1$. Then (1.2.4) and (1.2.5) imply

$$I(\alpha M_1, \beta M_j) \geq \alpha^{\frac{4p-6}{3(p-1)}} \beta^{\frac{1}{3(q-1)}} I(M_1, M_j),$$

and a similar inequality with $(1 - \alpha)$ and $(1 - \beta)$. As we have $I(M_1, M_j) < 0$, we only have to show that

$$\alpha^{\frac{4p-6}{3(p-1)}} \beta^{\frac{1}{3(q-1)}} + (1 - \alpha)^{\frac{4p-6}{3(p-1)}} (1 - \beta)^{\frac{1}{3(q-1)}} < 1,$$

which holds true since $q > 1$ and $\frac{4p-6}{3(p-1)} > 1$. The proof of Lemma 1.2.1 is complete. \square

Now we state the second lemma concerning the pure Manev case.

Lemma 1.2.2 (Monotonicity properties of the infimum $J(M_1, M_j)$). *Let j be a real-valued function satisfying Assumptions (H1) and (H2), let $M_1, M_j > 0$ and let $J(M_1, M_j)$ be defined by (1.1.14) in the case $\delta = 0$. Then for all $0 < \alpha \leq 1$ we have*

$$\alpha^{\frac{3-p}{3(p-1)}} J(M_1, M_j) \leq J(\alpha M_1, M_j) \leq \alpha^{\frac{3-q}{3(q-1)}} J(M_1, M_j), \quad (1.2.6)$$

$$\alpha^{-\frac{2}{3(q-1)}} J(M_1, M_j) \leq J(M_1, \alpha M_j) \leq \alpha^{-\frac{2}{3(p-1)}} J(M_1, M_j), \quad (1.2.7)$$

In particular, the function $(M_1, M_j) \mapsto J(M_1, M_j)$ is continuous.

Proof. Let $M_1, M_j > 0$ and $\alpha \in (0, 1]$. Let $f \in \mathcal{F}(\alpha M_1, M_j)$ and let

$$\tilde{f}(x, v) = \gamma f\left(\frac{\gamma^{1/3}}{\lambda^{1/3}}x, v\right)$$

be the unique rescaled function in $\mathcal{F}(M_1, M_j)$ given by Lemma 1.4.1. Then we deduce from (1.4.2) that $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ and, since $\alpha < 1$, we have also

$$\gamma^{q-1} \leq \alpha \leq \gamma^{p-1}.$$

Moreover, we also deduce from the rescaling identities of Appendix A that

$$K(\tilde{f}) = \alpha^{1/3} \gamma^{-2/3} K(f).$$

This yields (1.2.6). The inequality (1.2.7) is obtained similarly. \square

1.2.2 Proof of Theorem 1.1.1

We are now ready to prove Theorem 1.1 which concerns the existence of the minimizers and some of their properties.

Step 1. Existence of a minimizer.

The Poisson-Manev case ($\delta > 0$).

Let $M_1, M_j > 0$. From Lemma 1.2.1, we know that $I(M_1, M_j)$ is finite. Consider a minimizing sequence f_n of (1.1.13):

$$\|f_n\|_{L^1} = M_1, \quad \|j(f_n)\|_{L^1} = M_j \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n) = I(M_1, M_j). \quad (1.2.8)$$

At fixed n , we denote by f_n^{*x} the standard Schwarz rearrangement of f_n with respect to the variable x . From the Riesz inequality, we have $E_{\text{pot}}(f_n^{*x}) \geq E_{\text{pot}}(f_n)$. Thus we have $\mathcal{H}(f_n^{*x}) \leq \mathcal{H}(f_n)$ and we may assume that the sequence f_n is spherically symmetric in space.

We now observe that the sequence (f_n) is bounded in \mathcal{E}_j . Indeed, from the subcritical condition (1.1.12), the kinetic energy of f_n is controlled by the inequality (1.2.3). Thus, from Lemma 1.4.3 of Appendix B, there exists $f \in \mathcal{E}_j$ such that

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^6) \quad \text{and} \quad E_{\text{pot}}(f_n) \rightarrow E_{\text{pot}}(f).$$

By lower semi-continuity, we then have $\mathcal{H}(f) \leq I(M_1, M_j)$ which implies $f \neq 0$ since $I(M_1, M_j) < 0$ (see (1.2.1)). Therefore there exist $0 < \alpha, \beta \leq 1$ such that $\|f\|_{L^1} = \alpha M_1$ and $\|j(f)\|_{L^1} = \beta M_j$. Combining this with (1.2.5) and (1.2.4), we get

$$\alpha^{\frac{4p-6}{3(p-1)}} \beta^{\frac{1}{3(q-1)}} I(M_1, M_j) \leq \mathcal{H}(f) \leq I(M_1, M_j).$$

Hence $\alpha = \beta = 1$ and f is a minimizer of (1.1.13).

The pure Manev case ($\delta = 0, \kappa = 1$).

Let f_n be a minimizing sequence of (1.1.14). By a similar argument as above, we may assume that f_n is spherically symmetric in space. Moreover, from the rescaling formulas of Appendix 1.4.2, the sequence of functions defined by $\hat{f}_n = f_n(\frac{x}{\lambda_n}, \lambda_n v)$ (where $\lambda_n^2 = \| |v|^2 f_n \|_{L^1}$) satisfies

$$\hat{f}_n \in \mathcal{F}(M_1, M_j), \quad K(\hat{f}_n) = K(f_n) \quad \text{and} \quad \| |v|^2 \hat{f}_n \|_{L^1} = 1.$$

In particular, (\hat{f}_n) is bounded in \mathcal{E}_j . From Lemma 1.4.3 of Appendix 1.4.2, there exists $\hat{f} \in \mathcal{E}_j$ such that

$$\hat{f}_n \rightharpoonup \hat{f} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^6) \quad \text{and} \quad E_{\text{pot}}(\hat{f}_n) \rightarrow E_{\text{pot}}(\hat{f}).$$

Since (\hat{f}_n) is a minimizing sequence of (1.1.14), $E_{\text{pot}}(\hat{f}_n)$ converges to $J(M_1, M_j)^{-1}$. This implies that

$$E_{\text{pot}}(\hat{f}) = J(M_1, M_j)^{-1} > 0$$

and then $\hat{f} \neq 0$.

Moreover, from Fatou's Lemma, we have $K(\hat{f}) \leq \liminf K(\hat{f}_n) = J(M_1, M_j)$ and we have also $\hat{f} \in \mathcal{F}(\alpha M_1, \beta M_j)$ with $0 < \alpha, \beta \leq 1$. A similar rescaling as in the proof of Lemma 1.2.2 gives

$$K(\hat{f}) \geq \frac{1}{\alpha^{\frac{q-3}{3(q-1)}} \beta^{\frac{2}{3(p-1)}}} J(M_1, M_j),$$

which implies that $\alpha = \beta = 1$. Therefore f is a minimizer of the variational problem (1.1.14).

Step 2. Euler-Lagrange equation for the minimizer.

The Poisson-Manev case ($\delta > 0$).

Let $M_1, M_2 > 0$ satisfy the subcritical condition (1.1.12) and let Q be a minimizer of (1.1.13). Our goal in this step is to derive the Euler-Lagrange equation satisfied by Q . Let $\varepsilon > 0$. We introduce the set

$$S_\varepsilon = \{(x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad Q(x, v) \geq \varepsilon\},$$

and pick a compactly supported function $g \in L^\infty(\mathbb{R}^6)$ such that $g > 0$ almost everywhere in $\mathbb{R}^6 \setminus S_\varepsilon$. Then,

$$\text{for all } t \in \left[0, \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}\right], \quad f_t = Q + tg \in \mathcal{E}_j \setminus \{0\}.$$

Similarly as in Appendix 1.4.1, there exists a unique pair (γ_t, η_t) positive numbers such that the function \tilde{f}_t defined by

$$\tilde{f}_t(x, v) = \gamma_t f_t \left(x, \left(\frac{\gamma_t}{\eta_t} \right)^{\frac{1}{3}} v \right)$$

belongs to $\mathcal{F}(M_1, M_j)$, which is equivalent to

$$\eta_t = \frac{M_1}{\|f_t\|_{L^1}} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\gamma_t} \|j(\gamma_t f_t)\|_{L^1} = \frac{M_j}{M_1} \|f_t\|_{L^1}. \quad (1.2.9)$$

By differentiating the first equality, we obtain for $t \rightarrow 0$

$$\eta_t = 1 - \frac{\int_{\mathbb{R}^6} g}{M_1} t + o(t). \quad (1.2.10)$$

For all $t \in [0, \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}]$ and for all $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, we set

$$G(\gamma, t) = \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^6} j(\gamma f_t) - \frac{M_j}{M_1} \int_{\mathbb{R}^6} f_t.$$

Then G is clearly a \mathcal{C}^1 function of t and γ . Moreover, from Appendix 1.4.1, we get

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma}(\gamma, t) > 0.$$

This implies that $t \mapsto \gamma_t$ is a \mathcal{C}^1 function and, by differentiating (1.2.9) with respect to t , we obtain

$$\gamma_t = 1 + \left(\frac{M_j}{M_1 C_Q} \int_{\mathbb{R}^6} g - \frac{1}{C_Q} \int_{\mathbb{R}^6} j'(Q)g \right) t + o(t), \quad \text{as } t \rightarrow 0, \quad (1.2.11)$$

where, from the hypothesis (1.1.8), $C_Q = \|j'(Q)Q\|_{L^1} - M_j$ is a positive constant. Since Q is a minimizer of (1.1.13) and since \tilde{f}_t belongs to $\mathcal{F}(M_1, M_j)$, we have

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(\tilde{f}_t) - \mathcal{H}(Q)}{t} \geq 0.$$

From the computation in Appendix 1.4.1, we also have

$$\begin{cases} \left\| |v|^2 \tilde{f}_t \right\|_{L^1} - \left\| |v|^2 Q \right\|_{L^1} = \frac{\eta_t^{5/3}}{\gamma_t^{2/3}} \left(\left\| |v|^2 Q \right\|_{L^1} + t \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 g \right) - \left\| |v|^2 Q \right\|_{L^1}, \\ E_{pot}(\tilde{f}_t) - E_{pot}(Q) = \eta_t^2 \left(E_{pot}(Q) - 2t \int_{\mathbb{R}^6} \phi_Q g + t^2 E_{pot}(g) \right) - E_{pot}(Q). \end{cases}$$

Inserting the expansions (1.2.10) and (1.2.11) in these expressions, we get

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q - \lambda - \mu j'(Q) \right) g \geq 0, \quad (1.2.12)$$

with

$$\mu = -\frac{\left\| |v|^2 Q \right\|_{L^1}}{3C_Q} \quad \text{and} \quad \lambda = -\frac{1}{M_1} \left(E_{pot}(Q) - \frac{\left\| |v|^2 Q \right\|_{L^1}}{6} \left(5 + \frac{2M_j}{C_Q} \right) \right).$$

We now observe that μ and λ are negative. Indeed, the equality $I(M_1, M_j) = \| |v|^2 Q \|_{L^1} - E_{pot}(Q)$ gives

$$\lambda = \frac{1}{M_1} \left(I(M_1, M_j) - \frac{\| |v|^2 Q \|_{L^1}}{6C_Q} \int_{\mathbb{R}^6} (j'(Q)Q - 3j(Q)) \right),$$

where $I(M_1, M_j) < 0$ and, from (1.1.8), $j'(Q)Q - 3j(Q) \geq 0$. Since equality (1.2.12) holds for all $g \in L^\infty(\mathbb{R}^6)$ which is compactly supported on S_ε , we have

$$\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q - \lambda - \mu j'(Q) = 0 \quad \text{on } S_\varepsilon.$$

This means that this equality holds on $\text{Supp}(Q)$. Similarly, out of the support of Q , as $g \geq 0$, we have

$$\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q - \lambda \geq 0.$$

We finally get, for all $(x, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$Q(x, v) = (j')^{-1} \left(\frac{\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) - \lambda}{\mu} \right)_+.$$

We will show later (Step 3) that ϕ_Q is a \mathcal{C}^1 function, which is sufficient to ensure that Q is a steady state. Indeed, from (H1), we deduce that the function $(j')^{-1}$ is \mathcal{C}^1 on \mathbb{R}_+^* with $(j')^{-1}(0) = 0$. Hence, Q being a function of the microscopic energy is a steady state of (1.1.1), at least in the weak sense. Note that Q is \mathcal{C}^1 in the interior of its support and is continuous but may have an infinite derivative at the boundary of its support.

The pure Manev case ($\delta = 0, \kappa = 1$).

Let Q be a minimizer of (1.1.14). To get the Euler-Lagrange equation, we simply differentiate $f \mapsto K(f)$ following the same procedure as above and find after computations

$$Q = (j')^{-1} \left(\frac{\frac{|v|^2}{2} + \gamma \phi_Q(x) - \lambda}{\mu} \right)_+,$$

with

$$\gamma = \frac{\| |v|^2 Q \|_{L^1}}{E_{pot}(Q)} = J(M_1, M_j), \quad \lambda = -\frac{(C_Q - 2M_j) \| |v|^2 Q \|_{L^1}}{6M_1 C_Q}, \quad \mu = -\frac{\| |v|^2 Q \|_{L^1}}{3C_Q}.$$

By inserting these expressions in (1.1.1), we observe that f is a steady state of (1.1.1) if and only if $\gamma = 1$, which means $J(M_1, M_j) = 1$. Let $M_1 > 0$ be fixed. From the control of the infimum (1.2.7), we deduce that the function $M_j \mapsto J(M_1, M_j)$ is continuous, strictly decreasing and satisfies

$$\lim_{M_j \rightarrow 0} J(M_1, M_j) = +\infty, \quad \lim_{M_j \rightarrow +\infty} J(M_1, M_j) = 0.$$

Therefore, it is clear that there exists a unique M_j such that $J(M_1, M_j) = 1$.

Step 3. Regularity of the potential ϕ_Q and compact support of Q

Let us prove that ϕ_Q belongs to $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, for all $\alpha \in (0, 1)$. Using the expression of Q , we get

$$\rho_Q(x) = \int_{\mathbb{R}^3} (j')^{-1} \left(\frac{\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) - \lambda}{\mu} \right)_+ dv. \quad (1.2.13)$$

Passing to the spherical velocity coordinate $u = |v|$ and performing the change of variable $w = \frac{u^2}{2|\mu|}$, we get

$$\rho_Q(x) = 4\pi\sqrt{2}|\mu|^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} (j')^{-1} (k(x) - w)_+ \sqrt{w} dw, \quad (1.2.14)$$

where $k(x) = \frac{\phi_Q(x) - \lambda}{\mu}$. We remark that the support of ρ_Q is contained in $\{x \in \mathbb{R}^3, k(x) \geq 0\}$ and that $k(x)_+ \leq \phi_Q(x)/\mu$. Moreover, from (H2), for all $s \geq 0$ we have

$$(j')^{-1}(s) \leq C \left(s^{\frac{1}{p-1}} + s^{\frac{1}{q-1}} \right).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \rho_Q(x) &\leq C \int_0^{k(x)_+} \left((k(x) - w)^{\frac{1}{p-1}} + (k(x) - w)^{\frac{1}{q-1}} \right) \sqrt{w} dw \\ &\leq C \left((k(x)_+)^{\frac{3}{2} + \frac{1}{p-1}} + ((k(x)_+)^{\frac{3}{2} + \frac{1}{q-1}}) \right) \\ &\leq C \left(|\phi_Q(x)|^{\frac{3}{2} + \frac{1}{p-1}} + |\phi_Q(x)|^{\frac{3}{2} + \frac{1}{q-1}} \right). \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Since Q belongs to $L^1 \cap L^p$, $p > 3$, and since $|v|^2 Q$ belongs to L^1 , we deduce from interpolation inequalities that $\rho_Q \in L^1 \cap L^{p_0}$ with $p_0 = \frac{5p-3}{3p-1} \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$.

Assume now that $\rho_Q \in L^1 \cap L^k$ for some $\frac{3}{2} < k < 3$. Then from the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, we deduce that ϕ_Q^P belongs to all L^s with $3 < s \leq \infty$ and that ϕ_Q^M belongs to all L^s with $\frac{3}{2} < s \leq \frac{3k}{3-k}$. Hence, from (1.2.15), since $q \geq p$, we deduce that the function ρ_Q belongs to L^ℓ with

$$\ell \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{p-1} \right) = \frac{3k}{3-k}. \quad (1.2.16)$$

Using (1.2.16) and $p > 3$ (Assumption (H2)), a simple bootstrap argument enables to prove that there exists $r > 3$ such that $\rho_Q \in L^r$.

Consequently, from Sobolev embeddings and from $(-\Delta)^{1/2} \phi_Q^M = -\rho_Q$, we deduce that the Manev potential ϕ_Q^M belongs to $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ for all $\alpha \in (0, 1 - \frac{3}{r})$. Since this function converges to 0 at the infinity, we have $\phi_Q^M \in L^\infty$, and then $\phi_Q \in L^\infty$. Thus (1.2.15) gives $\rho_Q \in L^\infty$. Finally, using again Sobolev embeddings, ϕ_Q^M and ϕ_Q^P belong to $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ for all $\alpha \in (0, 1)$.

From the regularity of ϕ_Q , the fact that this function goes to 0 as $|x| \rightarrow +\infty$ and that $\lambda < 0$, one deduces that

$$\text{Supp}(Q) = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad \frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) - \lambda \leq 0 \right\}$$

is a compact subset of \mathbb{R}^6 .

Let us now prove that ρ_Q belongs to $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ for all $\alpha \in (0, 1)$. Passing to the spherical coordinate in velocity in the expression (1.2.13) of ρ_Q and performing the change of variable $s = \frac{\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x) - \lambda}{\mu}$ yields

$$\rho_Q(x) = |\mu|^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}_+} (j')^{-1}(s) \left(\frac{\phi_Q(x) - \lambda}{\mu} - s \right)_+^{1/2} ds.$$

For all $k \in \mathbb{R}$, denote $f(k) = \int_{\mathbb{R}_+} (j')^{-1}(s) (k - s)_+^{1/2} ds$. We claim that, for all $k_0 > 0$, we have

$$\forall k_1, k_2 \in (-\infty, k_0], \quad |f(k_1) - f(k_2)| \leq (j')^{-1}(k_0) k_0^{1/2} |k_1 - k_2|. \quad (1.2.17)$$

By taking $k_0 = \frac{-\|\phi_Q\|_\infty - \lambda}{\mu}$, we deduce from this claim that

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^6, \quad |\rho_Q(x) - \rho_Q(y)| \leq C |\phi_Q(x) - \phi_Q(y)|.$$

This shows that $\rho_Q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ for all $\alpha \in (0, 1)$. Next, since we have

$$\phi_Q = \Delta^{-1}(\rho_Q) - (-\Delta)^{-1/2}(\rho_Q),$$

we can conclude from standard regularity argument that $\phi_Q \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$ for all $\alpha \in (0, 1)$. This is the regularity of the potential stated in Theorem 1.1.1. Let us now prove the claim (1.2.17). For all $k_1 \leq k_2 \leq k_0$, we have

$$\begin{aligned} f(k_2) - f(k_1) &= \int_{\mathbb{R}_+} (j')^{-1}(s) \left((k_2 - s)_+^{1/2} - (k_1 - s)_+^{1/2} \right) ds \\ &\leq (j')^{-1}(k_0) \int_{\mathbb{R}_+} \left((k_2 - s)_+^{1/2} - (k_1 - s)_+^{1/2} \right) ds \\ &= \frac{2}{3} (j')^{-1}(k_0) \left((k_2)_+^{3/2} - (k_1)_+^{3/2} \right) \leq (j')^{-1}(k_0) k_0^{1/2} (k_2 - k_1). \end{aligned}$$

Since f is an increasing function, this yields (1.2.17). This concludes the proof of the regularity of the potential stated in Theorem 1.1.1.

Step 4. The functions ρ_Q and ϕ_Q are spherically symmetric and monotone.

Consider a minimizer Q of (1.1.13), continuous and compactly supported thanks to the previous step, and denote by Q^{*x} its symmetric rearrangement with respect to the x variable only. We have clearly $Q^{*x} \in \mathcal{F}(M_1, M_j)$ and $\int |v|^2 Q dx dv = \int |v|^2 Q^{*x} dx dv$. Moreover, by the Riesz inequality (see [43]), we have

$$\int_{\mathbb{R}^6} Q(x, v) Q(y, w) g(|x - y|) dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^6} Q^{*x}(x, v) Q^{*x}(y, w) g(|x - y|) dx dy \quad (1.2.18)$$

for all $(v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, where $g(r) = \frac{\delta}{r} + \frac{\kappa}{r^2}$ (recall that $\delta \geq 0$ and $\kappa \geq 0$). Therefore, by integrating this inequality with respect to v and w , one gets

$$E_{pot}(Q) \leq E_{pot}(Q^{*x}),$$

which means that $\mathcal{H}(Q^{*x}) \leq \mathcal{H}(Q)$: Q^{*x} is also a minimizer of (1.1.13). Hence, we must have equality in the above inequalities: $E_{pot}(Q) = E_{pot}(Q^{*x})$ and, even more, we have an equality in (1.2.18) for all v, w . We are then in a situation of equality in the Riesz inequality: since the function g is strictly decreasing, we deduce that (see [43]), for all v, w , there exists a translation shift $x_0(v, w)$ such that

$$Q(x, v) = Q^{*x}(x + x_0(v, w), v) \quad \text{and} \quad Q(x, w) = Q^{*x}(x + x_0(v, w), w). \quad (1.2.19)$$

Let v be such that $Q(\cdot, v) \not\equiv 0$. Q being compactly supported, we integrate the first equality in (1.2.19) against x and obtain

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} x Q(x, v) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} x Q^{*x}(x + x_0(v, w), v) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} x Q^{*x}(x, v) dx - x_0(v, w) \int_{\mathbb{R}^3} Q^{*x}(x, v) dx. \end{aligned}$$

Hence, we have the expression

$$x_0(v, w) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} x (Q(x, v) - Q^{*x}(x, v)) dx}{\int_{\mathbb{R}^3} Q^{*x}(x, v) dx}$$

and then $x_0(v, w)$ is independent of w . Similarly, using the second equality in (1.2.19), one obtains that x_0 is independent of v . We have proved finally that there exists $x_0 \in \mathbb{R}^3$ such that

$$Q(x, v) = Q^{*x}(x + x_0, v) = Q^{*x}(|x + x_0|, v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Consequently, up to a translation shift, ρ_Q is a nonincreasing function of $|x|$.

Let us now prove that ϕ_Q is a nondecreasing function of $r = |x|$. Since the function j is convex and $\mu < 0$, the expression (1.2.13) shows that $\phi_Q(r)$ is nondecreasing on the compact support of the nonincreasing function $\rho_Q(r)$. Let $[0, R_Q]$ be this compact support.

For $|x| = r > R_Q$, we have

$$\phi_Q^P(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_Q(y)}{4\pi|x-y|} dy \quad \text{and} \quad \phi_Q^M(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_Q(y)}{2\pi^2|x-y|^2} dy.$$

Passing to the spherical coordinate (see the proof of Proposition 1.4.2 in Appendix 1.4.2), we have

$$\phi_Q^P(x) = -\frac{M_1}{4\pi r} \quad \text{and} \quad \phi_Q^M(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{R_Q} \frac{s \rho_Q(s)}{r} \ln \left(\frac{r+s}{r-s} \right) ds.$$

Since the function $r \mapsto \frac{1}{r} \ln \left(1 + \frac{2s}{r-s} \right)$ is positive and decreasing, ϕ_Q is nondecreasing on $[R_Q, +\infty)$. The proof of Theorem 1.1.1 is complete. \square

1.3 Orbital stability of the ground states

To prove the orbital stability result stated in Theorem 1.1.3, we first need to prove the uniqueness of the minimizer under equimeasurability and symmetric constraints which are inherited from the invariance properties of the Vlasov-Manev flow. This uniqueness result is at the heart of our stability analysis and is quite robust in the sense that its proof does not use the Euler-Lagrange equation. Technically, the uniqueness proof only uses the fact that a minimizer is a function of a certain microscopic energy, which is not necessarily that of the minimizer. Therefore our proof does not use the equation satisfied by the potential itself (a non linear fractional-Laplacian equation in the present case).

1.3.1 Uniqueness of the minimizer under equimeasurability condition

This subsection is devoted to the proof of Lemma 1.1.2.

Let

$$Q_0(x, v) = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \psi_0(x)\right), \quad Q_1(x, v) = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \psi_1(x)\right)$$

be the functions defined in Lemma 1.1.2. Note that ψ_0 and ψ_1 are not supposed to coincide with ϕ_{Q_0} and ϕ_{Q_1} respectively, which means that they are not supposed to satisfy the fractional-Laplacian equation. For $i \in \{0, 1\}$ and for all $\tau < 0$, we define

$$a_{\psi_i}(\tau) = \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad \frac{|v|^2}{2} + \psi_i(x) < \tau \right\}.$$

From the equimeasurability of Q_0 and Q_1 and the properties of the function F , we have

$$\forall \tau < 0, \quad a_{\psi_0}(\tau) = a_{\psi_1}(\tau). \quad (1.3.1)$$

For $i \in \{0, 1\}$, we define

$$\mu_{\psi_i}(\lambda) = \text{meas} \{x \in \mathbb{R}^3, \quad \psi_i(x) < \lambda\}$$

for all $\lambda < 0$ and we have then for all $\tau < 0$,

$$a_{\psi_i}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^3} \mu_{\psi_i} \left(\tau - \frac{|v|^2}{2} \right) dv.$$

Passing to the spherical velocity coordinate $u = |v|$ and performing the change of variable $w = \tau - u^2/2$, we obtain

$$a_{\psi_i}(\tau) = 4\pi\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\tau} \mu_{\psi_i}(w) \sqrt{\tau - w} dw. \quad (1.3.2)$$

We claim that the expression (1.3.2) and the equality (1.3.1) imply that,

$$\text{for almost all } \lambda < 0, \quad \mu_{\psi_0}(\lambda) = \mu_{\psi_1}(\lambda). \quad (1.3.3)$$

Hence, as ψ_0 and ψ_1 are continuous and nondecreasing, we have $\psi_0 = \psi_1$ on the set

$$\{x \in \mathbb{R}^3, \psi_0(x) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3, \psi_1(x) < 0\},$$

which immediatly gives $Q_0 = Q_1$.

Proof of (1.3.3) from (1.3.1) and (1.3.2). By differentiating with respect to τ the function a_{ψ_i} defined by (1.3.2), one gets

$$\forall \tau < 0, \quad a'_{\psi_i}(\tau) = 2\pi\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu_{\psi_i}(w)}{\sqrt{\tau - w}} dw. \quad (1.3.4)$$

Now, remarking that, for $w < \lambda$, the following integral is constant:

$$I(\lambda, w) = \int_w^{\lambda} \frac{d\tau}{\sqrt{(\lambda - \tau)(\tau - w)}} = \pi,$$

one deduces from the Fubini theorem that

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{a'_{\psi_i}(\tau)}{\sqrt{\lambda - \tau}} d\tau = 2\pi\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\lambda} \mu_{\psi_i}(w) I(\lambda, w) dw = 2\pi^2\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\lambda} \mu_{\psi_i}(w) dw.$$

Thus, from $a_{\psi_0} = a_{\psi_1}$, we deduce that $\mu_{\psi_0}(\lambda) = \mu_{\psi_1}(\lambda)$ for almost all $\lambda < 0$, and the proof of (1.3.3) is complete.

End of the proof of Lemma 1.1.2. Let Q_0, Q_1 be two equimeasurable and spherically symmetric steady states to (1.1.1) which minimize the variational problem (1.1.13) in the Poisson-Manev case ($\delta > 0$) or the variational problem (1.1.14) in the pure Manev case ($\delta = 0, \kappa = 1$). From Theorem 1.1.1, there exist $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1 < 0$ such that, for $i \in \{0, 1\}$,

$$Q_i(x, v) = (j')^{-1} \left(\frac{\frac{|v|^2}{2} + \phi_{Q_i}(x) - \lambda_i}{\mu_i} \right)_+. \quad (1.3.5)$$

We now define, for $i \in \{0, 1\}$,

$$\tilde{Q}_i(x, v) = Q_i \left(\frac{x}{|\mu_i|^{1/2}}, |\mu_i|^{1/2} v \right).$$

The functions \tilde{Q}_0 and \tilde{Q}_1 are still equimeasurable and satisfy

$$\tilde{Q}_i(x, v) = (j')^{-1} \left(-\frac{|v|^2}{2} - \psi_i(x) \right)_+ \quad \text{with} \quad \psi_i(x) = \frac{\phi_{Q_i} \left(\frac{x}{|\mu_i|^{1/2}} \right) - \lambda_i}{|\mu_i|}.$$

Since ϕ_{Q_i} is continuous nondecreasing and converges to 0 as $r \rightarrow +\infty$, the function ψ_i is continuous, nondecreasing and the set $\{x \in \mathbb{R}^3, \psi_0(x) < 0\}$ is bounded. From the previous step, we then conclude that

$$\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_1,$$

which means that

$$Q_1(x, v) = Q_0\left(\frac{x}{\alpha}, \alpha v\right) \quad \text{with} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}. \quad (1.3.6)$$

We shall now prove that $\alpha = 1$.

The pure Manev case. In this case, the equality of the kinetic energies (which is assumed in this lemma) directly gives $\alpha = 1$.

The Poisson-Manev case. Let us derive a virial identity satisfied by the minimizers Q of (1.1.13), using a rescaling argument. For $\lambda > 0$, we set $f_\lambda(x, v) = Q(\lambda x, \frac{v}{\lambda})$, which implies $f_\lambda \in \mathcal{F}(M_1, M_j)$ and

$$\mathcal{H}(f_\lambda) = \lambda^2 \| |v|^2 Q \|_{L^1} - \lambda \delta E_{pot}^P(Q) - \lambda^2 \kappa E_{pot}^M(Q).$$

This function of λ has a strict global minimizer in $\lambda = 1$, which yields the following virial identity:

$$\| |v|^2 Q \|_{L^1} - \frac{\delta}{2} E_{pot}^P(Q) - \kappa E_{pot}^M(Q) = 0. \quad (1.3.7)$$

Moreover we recall that Q satisfies

$$\| |v|^2 Q \|_{L^1} - \delta E_{pot}^P(Q) - \kappa E_{pot}^M(Q) = I(M_1, M_j).$$

Combining these two equalities, we get

$$\frac{\delta}{2} E_{pot}^P(Q) = -I(M_1, M_j). \quad (1.3.8)$$

Let us now use this identity for the two minimizers Q_0 and Q_1 . From (1.3.8) and (1.2.1), one deduces that

$$E_{pot}^P(Q_0) = E_{pot}^P(Q_1) > 0.$$

Moreover, from (1.3.6) and Appendix 1.4.1, one gets

$$E_{pot}^P(Q_1) = \frac{1}{\alpha} E_{pot}^P(Q_0).$$

This yields $\alpha = 1$, which ends the proof of Lemma 1.1.2. \square

1.3.2 Orbital stability of the minimizers, proof of Theorem 1.1.3

In this subsection, we prove Theorem 1.1.3.

The Poisson-Manev case.

Let Q be a minimizer of (1.1.13) and assume that Theorem 1.1.3 is false. Then there exist $\varepsilon > 0$ and sequences $f_0^n \in \mathcal{E}_j$, $t_n > 0$, such that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_0^n - Q\|_{\mathcal{E}_j} = 0, \quad (1.3.9)$$

and

$$\forall n \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^3, \|f^n(t_n, x, v) - Q(x + x_0, v)\|_{\mathcal{E}_j} \geq \varepsilon, \quad (1.3.10)$$

where $f^n(t, x, v)$ is a solution to (1.1.1) with initial data f_0^n .

From (1.3.9), we have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_0^n) = I(M_1, M_j), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_0^n\|_{L^1} = M_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|j(f_0^n - Q)\|_{L^1} = 0. \quad (1.3.11)$$

In particular, f_0^n converges to Q in the strong L^p topology and hence almost everywhere, up to a subsequence. Using the assumptions (H1), (H2) and the convexity of j , we deduce from a classical argument (see Theorem 2 in [12]) that $\|j(f_0^n)\|_{L^1} \rightarrow \|j(Q)\|_{L^1}$.

Let now $g_n(x, v) = f_n(t_n, x, v)$. By the conservation properties of the Vlasov-Manev system (1.1.1), we have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(g_n) = I(M_1, M_j), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{L^1} = M_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|j(g_n)\|_{L^1} = M_j, \quad (1.3.12)$$

and, for all $t \geq 0$,

$$\text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, g_n(x, v) > t\} = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, f_0^n(x, v) > t\}. \quad (1.3.13)$$

From Appendix 1.4.1, let us define

$$\bar{g}_n(x, v) = \gamma_n g_n \left(\frac{\gamma_n^{1/3}}{\lambda_n^{1/3}} x, v \right)$$

such that $\|\bar{g}_n\|_{L^1} = M_1$ and $\|j(\bar{g}_n)\|_{L^1} = M_j$. Then, from (1.3.12),

$$\gamma_n \rightarrow 1, \quad \lambda_n \rightarrow 1, \quad (1.3.14)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(\bar{g}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(g_n) = I(M_1, M_j).$$

Hence \bar{g}_n is a minimizing sequence of (1.1.13). Now, from classical arguments based on concentration-compactness techniques ([45], [46]) and the non-dichotomy inequality (1.2.2) (similarly as [38] and [40]), we claim that \bar{g}_n is relatively strongly compact in \mathcal{E}_j and converges to a ground state Q_1 , up to a subsequence and up to a translation shift in space. Hence, by admitting the claim proved in the end of the Poisson-Manev case, by (1.3.14), we have

$$g_n \rightarrow Q_1 \text{ in } \mathcal{E}_j \quad (1.3.15)$$

up to a subsequence and up to a translation shift.

Let us now prove that the equimeasurability (1.3.13) and the L^1 convergences of g_n and f_0^n imply the equimeasurability of Q and Q_1 . Indeed, we remark that, for $t > 0$ and $0 < \varepsilon < t$,

$$\begin{cases} \{g_n > t\} \subset (\{|g_n - Q_1| < \varepsilon\} \cap \{Q_1 > t - \varepsilon\}) \cup \{|g_n - Q_1| \geq \varepsilon\}, \\ \{g_n > t\} \supset \{|g_n - Q_1| < \varepsilon\} \cap \{Q_1 > t + \varepsilon\}. \end{cases}$$

By passing to the limit as $n \rightarrow +\infty$, one gets

$$\begin{cases} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \text{meas}\{g_n > t\} \leq \text{meas}\{Q_1 > t - \varepsilon\}, \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{meas}\{g_n > t\} \geq \text{meas}\{Q_1 > t + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Finally, passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$, we have $\text{meas}\{g_n > t\} \rightarrow \text{meas}\{Q_1 > t\}$ for almost all $t > 0$ and similarly $\text{meas}\{f_n^0 > t\} \rightarrow \text{meas}\{Q > t\}$ for almost all $t > 0$. Observing that the functions $t \mapsto \text{meas}\{Q > t\}$ and $t \mapsto \text{meas}\{Q_1 > t\}$ are right-continuous, we obtain the equimeasurability of Q and Q_1 .

We now use the characterization of ground states stated in Theorem 1.1.1 and the uniqueness result given by Lemma 1.1.2, to conclude that, $Q = Q_1$, up to a space translation shift. Finally, (1.3.15) contradicts (1.3.10).

To complete the proof of Theorem 1.1.3 in the Poisson-Manev case we have just to obtain the compactness of minimizing sequence of (1.1.13). Consider a minimizing sequence f_n of (1.1.13):

$$\|f_n\|_{L^1} = M_1, \quad \|j(f_n)\|_{L^1} = M_j \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n) = I(M_1, M_j). \quad (1.3.16)$$

Let

$$\rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f_n(x, v) dv.$$

From the concentration compactness lemma [45, 46], up to a subsequence, one of the three following possibilities occurs (B_R being the ball of radius R centered at the origin in \mathbb{R}^3):

(i) *Compactness*: there exists $y_n \in \mathbb{R}^3$ such that

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R < +\infty \text{ such that } \forall n \geq 1, \int_{y_n + B_R} \rho_n(x) dx \geq M_1 - \varepsilon. \quad (1.3.17)$$

(ii) *Vanishing*:

$$\forall R < +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{y + B_R} \rho_n(x) dx = 0. \quad (1.3.18)$$

(iii) *Dichotomy*: there exists $m_1 \in (0, M_1)$ such that for all $\varepsilon > 0$, there exist $n_0 \geq 1$ and sequences $(\rho_n^1)_{n \geq 1}, (\rho_n^2)_{n \geq 1}, (w_n)_{n \geq 1} \in L_+^1(\mathbb{R}^3)$ satisfying, for all $n \geq n_0$,

$$\begin{cases} \rho_n^1 \rho_n^2 = \rho_n^1 w_n = \rho_n^2 w_n = 0 \text{ almost everywhere,} \\ \rho_n = \rho_n^1 + \rho_n^2 + w_n \text{ with } 0 \leq \rho_n^1, \rho_n^2, w_n \leq \rho_n \\ \text{dist}(\text{Supp}(\rho_n^1), \text{Supp}(\rho_n^2)) \rightarrow +\infty \text{ as } n \rightarrow +\infty, \\ \|\rho_n - \rho_n^1 - \rho_n^2\|_{L^1} \leq \varepsilon, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^3} \rho_n^1(x) dx - m_1 \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \rho_n^2(x) dx - (M_1 - m_1) \right| < \varepsilon. \end{cases} \quad (1.3.19)$$

We claim that only compactness can occur. To show this claim, we need some preliminary results. First, we know that $\mathcal{H}(f_n)$ is bounded. Consequently, the inequality

$$\mathcal{H}(f_n) \geq \| |v|^2 f_n \|_{L^1} \left(1 - \frac{\kappa}{K_j^M} M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} M_j^{\frac{2}{3(p-1)}} \right) - \frac{1}{K_j^P} \| |v|^2 f_n \|_{L^1}^{\frac{1}{2}} M_1^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} M_j^{\frac{1}{3(p-1)}},$$

and the subcritical condition (3.1.10) imply that the kinetic energy of f_n is also bounded. Thus f_n is bounded in the energy space \mathcal{E}_j and a standard interpolation inequality shows that (ρ_n) is a bounded sequence in $L^r(\mathbb{R}^3)$ for all $r \in [1, q]$ with $q = \frac{5p-3}{3p-1} > \frac{3}{2}$ (recall that the real number p has been defined in Assumption (H2)).

Vanishing cannot occur. Assume that vanishing occurs and pick $\varepsilon > 0$. We denote $k_P = 1$, $k_M = 2$ and introduce the index $i \in \{P, M\}$. For $0 < \eta < R$, we decompose the Poisson and Manev potential energies into a sum of three terms, as

$$\begin{aligned} E_{pot}^i(f_n) &= \int_{|x-y|>R} \frac{\rho_n(x)\rho_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy + \int_{|x-y|<\eta} \frac{\rho_n(x)\rho_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy \\ &\quad + \int_{\eta<|x-y|<R} \frac{\rho_n(x)\rho_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy. \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

The first term in (1.3.20) can be estimated as follows. For R large enough, we have

$$\int_{|x-y|>R} \frac{\rho_n(x)\rho_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy \leq \frac{M_1^2}{R^{k_i}} \leq \varepsilon.$$

Let us now estimate the second term in (1.3.20). Let $K_\eta(x) = \frac{\mathbf{1}_{|x|<\eta}(x)}{|x|^{k_i}}$ and $r = \frac{q}{2(q-1)} < \frac{3}{2}$. Then, K_η belongs to $L^r(\mathbb{R}^3)$ with

$$\|K_\eta\|_r \leq C\eta^{\beta_i}, \quad \beta_i = \frac{3-k_i r}{r} > 0.$$

Furthermore, since r satisfies $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{q}$, we deduce from the Young inequality that

$$\|K_\eta * \rho_n\|_{q'} \leq C\|K_\eta\|_r \|\rho_n\|_q \leq C\eta^{\beta_i} \|\rho_n\|_q.$$

Hence, from the Hölder inequality, for η small enough we have

$$\int_{|x-y|<\eta} \frac{\rho_n(x)\rho_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy = \|\rho_n(K_\eta * \rho_n)\|_1 \leq C\eta^{\beta_i} \|\rho_n\|_q^2 < \varepsilon,$$

since $\|\rho_n\|_q$ is bounded.

In order to estimate the third term in (1.3.20), we write

$$\begin{aligned} \int_{\eta<|x-y|<R} \frac{\rho_n(x)\rho_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy &\leq \frac{1}{\eta^{k_i}} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_n(y) \left(\int_{|x-y|<R} \rho_n(x) dx \right) dy \\ &\leq \frac{M_1}{\eta^{k_i}} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{y+B_R} \rho_n(x) dx. \end{aligned}$$

Since we assume that vanishing occurs, we have

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{y+B_R} \rho_n(x) dx \rightarrow 0$$

and the third term converges to zero as $n \rightarrow +\infty$, for each fixed R and η . We finally obtain $E_{pot}^i(f_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$, for $i \in \{P, M\}$. Thus

$$E_{pot}(f_n) \rightarrow 0.$$

Now, passing to the limit in

$$\mathcal{H}(f_n) = \| |v|^2 f_n \|_{L^1} - E_{pot}(f_n) \geq -E_{pot}(f_n),$$

and, using (1.3.16), we get $I(M_1, M_j) \geq 0$ which contradicts (1.2.1). We have proved that vanishing cannot occur.

Dichotomy cannot occur. Suppose that dichotomy occurs and pick $\varepsilon > 0$. We have a decomposition $\rho_n = \rho_n^1 + \rho_n^2 + w_n$, where ρ_n^1 , ρ_n^2 and w_n are disjointly supported. We define then $f_n^1 = f_n \mathbf{1}_{\{x \in \text{Supp}(\rho_n^1)\}}$ and similarly f_n^2 and f_n^w . Now we write, for $i \in \{P, M\}$,

$$\begin{aligned} E_{pot}^i(f_n) - E_{pot}^i(f_n^1) - E_{pot}^i(f_n^2) &= 2 \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\rho_n^1(x) \rho_n^2(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\rho_n(x) w_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^6} \frac{w_n(x) w_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Let us treat the first term in (1.3.21). From

$$d_n = \text{dist}(\text{Supp}(\rho_n^1), \text{Supp}(\rho_n^2)) \rightarrow +\infty,$$

we deduce that

$$\int_{\mathbb{R}^6} \frac{\rho_n^1(x) \rho_n^2(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy \leq \frac{M_1^2}{(d_n)^{k_i}} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

We now treat the second and third terms in (1.3.21). We define $q_{crit,P} = \frac{6}{5}$ and $q_{crit,M} = \frac{3}{2}$ and we recall that, by standard interpolation inequalities, $\|w_n\|_{q_{crit,i}} \leq \|\rho_n\|_{q_{crit,i}}$ is bounded. Then, from the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, we have

$$\int_{\mathbb{R}^6} \frac{\rho_n(x) w_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy \leq C \|\rho_n\|_{q_{crit,i}} \|w_n\|_{q_{crit,i}} \leq C \|w_n\|_{q_{crit,i}}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^6} \frac{w_n(x) w_n(y)}{|x-y|^{k_i}} dx dy \leq C \|w_n\|_{q_{crit,i}}^2 \leq C \|w_n\|_{q_{crit,i}}.$$

From the Hölder inequality, we get

$$\|w_n\|_{q_{crit,i}} \leq \|w_n\|_1^{\theta_i} \|w_n\|_q^{1-\theta_i} \leq C \|w_n\|_1^{\theta_i} \leq C \varepsilon^{\theta_i}$$

for $\theta_i = \frac{q - q_{crit,i}}{q_{crit,i}(q-1)} > 0$ and for n large enough. We finally get, for $i \in \{P, M\}$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |E_{pot}^i(f_n) - E_{pot}^i(f_n^1) - E_{pot}^i(f_n^2)| \leq C\varepsilon^{\theta_i},$$

and thus,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |E_{pot}(f_n) - E_{pot}(f_n^1) - E_{pot}(f_n^2)| \leq C(\varepsilon^{\theta_1} + \kappa\varepsilon^{\theta_2}) \leq C\varepsilon^{\theta_2}.$$

Hence,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{H}(f_n) - \mathcal{H}(f_n^1) - \mathcal{H}(f_n^2)) \geq \| |v|^2 f_n^w \|_{L^1} - C\varepsilon^{\theta_2}.$$

As $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n) = I(M_1, M_j)$, we get

$$I(M_1, M_j) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{H}(f_n^1) + \mathcal{H}(f_n^2)) - C\varepsilon^{\theta_2}. \quad (1.3.22)$$

Now, from the dichotomy assumption, the boundness of f_n in \mathcal{E}_j , and from the disjoint support property, we have

$$M_j^1 + M_j^2 \leq M_j, \quad (1.3.23)$$

with

$$M_j^1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|j(f_n^1)\|_{L^1} \quad \text{and} \quad M_j^2 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|j(f_n^2)\|_{L^1}. \quad (1.3.24)$$

Let \tilde{f}_n^1 be the following rescaled function in $\mathcal{F}(m_1, M_j^1)$ defined thanks to Appendix 1.4.1, Lemma 1.4.1:

$$\tilde{f}_n^1(x, v) = \gamma_n f_n^1 \left(\frac{\gamma_n^{1/3}}{\lambda_n^{1/3}} x, v \right).$$

Then

$$\mathcal{H}(f_n^1) = \mathcal{H}(\tilde{f}_n^1) + (1 - \lambda_n) \| |v|^2 f \|_1 - (1 - \lambda_n^{\frac{5}{3}} \gamma_n^{\frac{1}{3}}) E_{pot}^P(f_n^1) - (1 - \lambda_n^{\frac{4}{3}} \gamma_n^{\frac{2}{3}}) \kappa E_{pot}^M(f_n^1),$$

where, by interpolation inequalities, the potential and kinetic energies are uniformly bounded. From the expression (1.4.2) of λ_n and γ_n , from the dichotomy condition (1.3.19) and from (1.3.24), we conclude that there exists $C_\varepsilon > 0$ such that, up to a subsequence extraction and for n large enough, we have

$$\mathcal{H}(f_n^1) \geq \mathcal{H}(\tilde{f}_n^1) - C_\varepsilon \geq I(m_1, M_j^1) - C_\varepsilon \quad \text{with} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = 0.$$

A similar result holds for f_n^2 which gives, from (1.3.22),

$$\begin{aligned} I(M_1, M_j) &\geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{H}(f_n^1) + \mathcal{H}(f_n^2)) \\ &\geq I(m_1, M_j^1) + I((M_1 - m_1), M_j^2). \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Now, from the nondichotomy condition (1.2.2), we deduce

$$I(m_1, M_j^1) + I((M_1 - m_1), M_j^2) > I(M_1, M_j^1 + M_j^2) \geq I(M_1, M_j), \quad (1.3.26)$$

where we used (1.2.4) coupled to (1.3.23). Since (1.3.26) contradicts (1.3.25), we have proved that dichotomy cannot occur.

Finally, we conclude from the concentration-compactness principle that compactness occurs. Therefore, from the boundedness of f_n in \mathcal{E}_j and the Dunford-Pettis theorem, we deduce that the sequence

$$\bar{f}_n(x, v) = f_n(x + y_n, v),$$

is weakly relatively compact in L^1 . Up to a subsequence, we have

$$\bar{f}_n \rightharpoonup f \text{ in } L^1 \text{ and } L^p \text{ with } f \in \mathcal{E}_j \quad (1.3.27)$$

and in particular

$$\|f\|_{L^1} = M_1.$$

Now we claim that

$$E_{pot}^P(\bar{f}_n) \rightarrow E_{pot}^P(f) \quad \text{and} \quad E_{pot}^M(\bar{f}_n) \rightarrow E_{pot}^M(f). \quad (1.3.28)$$

Indeed, for $i \in \{P, M\}$, we have

$$E_{pot}^i(\bar{f}_n - f) = \int_{\mathbb{R}^6} \frac{(\bar{\rho}_n(x) - \rho(x))(\bar{\rho}_n(y) - \rho(y))}{|x - y|^{k_i}} dx dy.$$

We decompose this integral similarly as in (1.3.20) for the proof of nonvanishing. There exist $\beta_i > 0$ and two positive constants C_1, C_2 such that, for $0 < \eta < R$,

$$E_{pot}^i(\bar{f}_n - f) \leq C_1 \eta^{\beta_i} + \frac{C_2}{R^{k_i}} + \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\rho}_n(x) - \rho(x)) v_n(x) dx,$$

where

$$v_n = (\bar{\rho}_n - \rho) * h_R^\eta \quad \text{with } h_R^\eta(x) = \frac{\mathbf{1}_{\{\eta < |x| < R\}}(x)}{|x|^{k_i}}.$$

The sequence v_n is bounded in $L^1 \cap L^\infty$. From $h_R^\eta \in L^\infty$ and from the convergence $\bar{\rho}_n \rightharpoonup \rho$ in L^1 , we get

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad v_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

Since, in addition, there is no mass loss:

$$\begin{aligned} \|\bar{\rho}_n * h_R^\eta\|_1 &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} h_R^\eta(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \bar{\rho}_n(y) dy \right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} h_R^\eta(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) dy \right) = \|\rho * h_R^\eta\|_1, \end{aligned}$$

we have in fact $v_n \rightarrow 0$ in L^1 , and also in $L^{q'}$. From the Hölder inequality, for all η and R we have

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\rho}_n(x) - \rho(x)) v_n(x) dx \rightarrow 0,$$

which implies $E_{pot}^i(\bar{f}_n - f) \rightarrow 0$ and also (1.3.28). Thus, by Fatou's lemma,

$$\mathcal{H}(f) \leq I(M_1, M_j) \quad \text{and} \quad \|j(f)\|_{L^1} \leq M_j. \quad (1.3.29)$$

Moreover, we have from (1.2.4),

$$0 > I(M_1, M_j) \geq \mathcal{H}(f) \geq I(M_1, \|j(f)\|_{L^1}) \geq \left(\frac{\|j(f)\|_{L^1}}{M_j} \right)^{\frac{1}{3(p_2-1)}} I(M_1, M_j).$$

Together with (1.3.29), this implies that $\|j(f)\|_{L^1} = M_j$. Hence $f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)$ and $\mathcal{H}(f) = I(M_1, M_j)$ and we finally get

$$\|\bar{f}_n\|_{L^1} \rightarrow \|f\|_{L^1}, \quad \| |v|^2 \bar{f}_n \|_{L^1} \rightarrow \| |v|^2 f \|_{L^1}, \quad \|j(\bar{f}_n)\|_{L^1} \rightarrow \|j(f)\|_{L^1}.$$

From standard convexity argument, see [12], we conclude that $\bar{f}_n \rightarrow f$ in L^1 , $|v|^2 \bar{f}_n \rightarrow |v|^2 f$ in L^1 and $j(\bar{f}_n - f) \rightarrow 0$ in L^1 . We have proved the strong convergence, in the \mathcal{E}_j sense, of the subsequence \bar{f}_n to the minimizer f and thus the compactness of minimizing sequence of (1.1.13). The proof of Theorem 1.1.3 in the Poisson-Manev case is completed. \square

The pure Manev case.

To prove Theorem 1.1.3 for the pure Manev case, it is clearly sufficient to prove the following proposition.

Proposition 1.3.1. *Let Q be a steady state of (1.1.1) which minimizes (1.1.14) and let $(f_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}_j$ such that for all $s > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, f_n(x, v) > s\} = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, Q(x, v) > s\} \quad (1.3.30)$$

and

$$\|f_n\|_{L^1} \rightarrow \|Q\|_{L^1}, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|j(f_n)\|_{L^1} \leq \|j(Q)\|_{L^1} \quad \text{and} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}(f_n)}{\| |v|^2 f_n \|_{L^1}} \leq 0. \quad (1.3.31)$$

Then there exists $(y_n)_{n \geq 1}$ sequence on \mathbb{R}^3 such that up to a subsequence

$$f_n \left(\lambda_n(x + y_n), \frac{v}{\lambda_n} \right) \rightarrow Q \text{ in } \mathcal{E}_j, \quad \text{where } \lambda_n = \left(\frac{\| |v|^2 Q \|_{L^1}}{\| |v|^2 f_n \|_{L^1}} \right)^{1/2}.$$

Proof. From the assumption (ii), the sequence of rescaled functions defined by $\hat{f}_n(x, v) = f_n(\lambda_n x, \frac{v}{\lambda_n})$ satisfies for all $s > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, \hat{f}_n(x, v) > s\} = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, Q(x, v) > s\}, \quad (1.3.32)$$

$$\limsup \mathcal{H}(\hat{f}_n) \leq 0 \quad \text{and then} \quad \liminf E_{pot}(\hat{f}_n) \geq \| |v|^2 Q \|_{L^1} = E_{pot}(Q) > 0. \quad (1.3.33)$$

From concentration-compactness argument [45, 46] and using Lemma 3.2 in [38], one can deduce that the sequence \hat{f}_n satisfies one of the three following alternatives: compactness, vanishing or dichotomy, see e.g. Lemma 3.2 in [38] for the definitions of these standard notions. In fact, we shall prove that only compactness may occur.

Indeed, vanishing cannot occur, since (1.3.33) prevents $E_{pot}(\hat{f}_n)$ from going to 0 as $n \rightarrow +\infty$. Next, if dichotomy occurs (see [38]), then there exist $0 < \alpha < 1$ such that, for all $\varepsilon > 0$, there exists a decomposition $\hat{f}_n = f_n^1 + f_n^2 + w_n$, with disjoint supports, such that we have

$$|\|f_n^1\|_{L^1} - \alpha\|Q\|_{L^1}| + |\|f_n^2\|_{L^1} - (1 - \alpha)\|Q\|_{L^1}| < \varepsilon, \quad (1.3.34)$$

and

$$|E_{pot}(\hat{f}_n) - E_{pot}(f_n^1) - E_{pot}(f_n^2)| < \varepsilon. \quad (1.3.35)$$

The control of the mass (1.3.34) and the monotonicity of the infimum from Lemma 1.2.2 imply that

$$K(f_n^1) \geq J(\alpha\|Q\|_{L^1} + \varepsilon, \|j(f_n^1)\|_{L^1}) \geq J(\alpha\|Q\|_{L^1} + \varepsilon, \|j(Q)\|_{L^1}).$$

By choosing $\varepsilon < \frac{1-\alpha}{2}\|Q\|_{L^1}$, we ensure that

$$J(\alpha\|Q\|_{L^1} + \varepsilon, \|j(Q)\|_{L^1}) \geq J\left(\frac{1+\alpha}{2}\|Q\|_{L^1}, \|j(Q)\|_{L^1}\right) > 1$$

and then

$$\mathcal{H}(f_n^1) = \| |v|^2 f_n^1 \|_{L^1} \left(1 - \frac{1}{K(f_n^1)}\right) \geq C_1 \| |v|^2 f_n^1 \|_{L^1}, \quad (1.3.36)$$

where $C_1 > 0$ does not depend of ε and n , which gives

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n^1) \geq 0, \quad \text{and similarly} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n^2) \geq 0. \quad (1.3.37)$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\hat{f}_n) &= \| |v|^2 f_n^1 \|_{L^1} + \| |v|^2 f_n^2 \|_{L^1} + \| |v|^2 w_n \|_{L^1} - E_{pot}(f_n) \\ &\geq \mathcal{H}(f_n^1) + \mathcal{H}(f_n^2) - \varepsilon, \end{aligned}$$

where we used (1.3.35). Passing to the limit in this inequality as $n \rightarrow +\infty$, we obtain

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{H}(f_n^1) + \mathcal{H}(f_n^2)) \leq \varepsilon.$$

From (1.3.36), we deduce that

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (\| |v|^2 f_n^1 \|_{L^1} + \| |v|^2 f_n^2 \|_{L^1}) \leq C\varepsilon,$$

where $C > 0$ is independent of ε . Then, using

$$E_{pot}(f_n^1) + E_{pot}(f_n^2) = \| |v|^2 f_n^1 \|_{L^1} + \| |v|^2 f_n^2 \|_{L^1} - \mathcal{H}(f_n^1) - \mathcal{H}(f_n^2)$$

together with (1.3.37), we get

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (E_{pot}(f_n^1) + E_{pot}(f_n^2)) \leq C\varepsilon.$$

For ε small enough, this contradicts (1.3.33) and (1.3.35). This proves that dichotomy cannot occur and then compactness follows. In particular, there exists a sequence of translation shifts y_n such that, up to a subsequence,

$$\hat{f}_n(\cdot + y_n) \rightharpoonup \hat{f} \text{ in } L^1(\mathbb{R}^6) \quad \text{and} \quad E_{pot}(\hat{f}_n) \rightarrow E_{pot}(\hat{f}).$$

Moreover, by lower semicontinuity and by (1.3.33), we have

$$\|j(\hat{f})\|_{L^1} \leq \|j(Q)\|_{L^1} \quad \text{and} \quad K(\hat{f}) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} K(\hat{f}_n) \leq 1.$$

Therefore, by (1.2.7), we have

$$1 = J(\|Q\|_{L^1}, \|j(Q)\|_{L^1}) \leq J(\|Q\|_{L^1}, \|j(\hat{f})\|_{L^1}) \leq K(\hat{f}) \leq 1.$$

The strict monotonicity of the function $M_j \mapsto J(M_1, M_j)$ yields

$$\|j(\hat{f})\|_{L^1} = \|j(Q)\|_{L^1} \quad \text{and} \quad K(\hat{f}) = 1.$$

From this, it is now standard to conclude the strong convergence $\hat{f}_n(\cdot + y_n) \rightarrow \hat{f}$ in \mathcal{E}_j . Note that \hat{f} is a minimizer of (1.1.14) satisfying $\| |v|^2 \hat{f} \|_{L^1} = \| |v|^2 Q \|_{L^1}$. Furthermore, from the strong L^1 convergence of $\hat{f}_n(\cdot + y_n)$ to Q and from their equimeasurability deduced from (1.3.30), one can prove that \hat{f} is equimeasurable to Q (this proof can be done following the same lines as in the above proof of orbital stability for the Poisson-Manev case). Therefore, from Lemma 1.1.2, one deduces finally that \hat{f} is equal to Q , up to a translation shift. This concludes the proof of Proposition 1.3.1 and the proof of Theorem 1.1.3 is complete. \square

1.4 Appendix

1.4.1 Rescalings

Let $f \in \mathcal{E}_j$ and let $\gamma > 0$, $\lambda > 0$ and $\mu > 0$. Then the rescaled function \tilde{f} defined by $\tilde{f}(x, v) = \gamma f(\frac{x}{\lambda}, \mu v)$ satisfies the following identities.

Norms

$$\|\tilde{f}\|_{L^1} = \gamma \frac{\lambda^3}{\mu^3} \|f\|_{L^1} \quad ; \quad \|j(\tilde{f})\|_{L^1} = \frac{\lambda^3}{\mu^3} \|j(\gamma f)\|_{L^1} \quad ; \quad \| |v|^2 \tilde{f} \|_{L^1} = \gamma \frac{\lambda^3}{\mu^5} \| |v|^2 f \|_{L^1}.$$

Functions

$$\rho_{\tilde{f}}(x) = \frac{\gamma}{\mu^3} \rho_f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad ; \quad \phi_{\tilde{f}}^P(x) = \gamma \frac{\lambda^2}{\mu^3} \phi_f^P\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad ; \quad \phi_{\tilde{f}}^M(x) = \gamma \frac{\lambda}{\mu^3} \phi_f^M\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Potential energy

$$E_{pot}^P(\tilde{f}) = \gamma^2 \frac{\lambda^5}{\mu^6} E_{pot}^P(f) \quad ; \quad E_{pot}^M(\tilde{f}) = \gamma^2 \frac{\lambda^4}{\mu^6} E_{pot}^M(f).$$

Lemma 1.4.1. *Let $f \in \mathcal{E}_j \setminus \{0\}$ and $M_1, M_j > 0$. Then there exists a unique pair of positive constants (γ, λ) such that the rescaled function \tilde{f} defined by*

$$\tilde{f}(x, v) = \gamma f \left(\frac{\gamma^{1/3}}{\lambda^{1/3}} x, v \right) \quad (1.4.1)$$

satisfies $\|\tilde{f}\|_{L^1} = M_1$ and $\|j(\tilde{f})\|_{L^1} = M_j$. Moreover, γ and λ satisfy

$$\lambda = \frac{M_1}{\|f\|_{L^1}} \quad \text{and} \quad \min(\gamma^{p-1}, \gamma^{q-1}) \leq \frac{M_j \|f\|_{L^1}}{M_1 \|j(f)\|_{L^1}} \leq \max(\gamma^{p-1}, \gamma^{q-1}). \quad (1.4.2)$$

Proof. The rescaling (1.4.1) gives immediately

$$\|\tilde{f}\|_{L^1} = \lambda \|f\|_{L^1} \quad \text{and} \quad \|j(\tilde{f})\|_{L^1} = \frac{\lambda}{\gamma} \|j(\gamma f)\|_{L^1}.$$

Hence, \tilde{f} satisfies $\|\tilde{f}\|_{L^1} = M_1$ and $\|j(\tilde{f})\|_{L^1} = M_j$ as soon as

$$\lambda = \frac{M_1}{\|f\|_{L^1}} \quad \text{and} \quad \frac{\|j(\gamma f)\|_{L^1}}{\gamma \|j(f)\|_{L^1}} = \frac{M_j \|f\|_{L^1}}{M_1 \|j(f)\|_{L^1}}.$$

The first parameter λ is then uniquely determined. Notice also that (1.4.2) is a direct consequence of the nondichotomy condition (1.1.9). It remains to prove the existence of a unique suitable γ .

Consider now the function of $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ defined by

$$h(\gamma) = \frac{\|j(\gamma f)\|_{L^1}}{\gamma \|j(f)\|_{L^1}}.$$

From the nondichotomy condition (1.1.9), we have

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} h(\gamma) = 0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} h(\gamma) = +\infty.$$

Moreover, from a direct calculation, one gets

$$h'(\gamma) = \frac{\|j'(\gamma f)f\|_{L^1}}{\gamma \|j(f)\|_{L^1}} - \frac{\|j(\gamma f)\|_{L^1}}{\gamma^2 \|j(f)\|_{L^1}} \geq (p-1) \frac{\|j(\gamma f)\|_{L^1}}{\gamma^2 \|j(f)\|_{L^1}} > 0,$$

where we used Assumption (H3) on the function j . Hence, there exists a unique $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ such that

$$h(\gamma) = \frac{M_j \|f\|_{L^1}}{M_1 \|j(f)\|_{L^1}}$$

and the Lemma is proved. \square

1.4.2 Some properties of radially symmetric potentials

Lemma 1.4.2. *There exists a constant $C > 0$ such that, for all $f \in \mathcal{E}_j$ spherically symmetric, we have for all $x \in \mathbb{R}^3$*

$$-\frac{C}{|x|} \|f\|_{L^1} \leq \phi_f^P(x) \leq 0. \quad (1.4.3)$$

Moreover, for all $0 < \alpha < 1$, there exists a constant $C_\alpha > 0$ such that, for all $f \in \mathcal{E}_j$ spherically symmetric, we have for all $x \in \mathbb{R}^3$

$$-\frac{C_\alpha}{|x|^{1+\alpha}} \|f\|_{\mathcal{E}_j} \leq \phi_f^M(x) \leq 0, \quad (1.4.4)$$

Recall that ϕ_f^P and ϕ_f^M are defined by (1.1.3).

Proof. Passing to the spherical coordinate $s = |y|$ and $x \cdot y = 2rs \cos \theta$ in (1.1.3), one gets

$$\phi_f^P(x) = - \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\rho_f(s) \sin \theta}{2(s^2 + r^2 - 2rs \cos \theta)^{1/2}} s^2 ds d\theta = - \int_0^{+\infty} \rho_f(s) g_r^P(s) s^2 ds, \quad (1.4.5)$$

$$\phi_f^M(x) = - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\rho_f(s) \sin \theta}{s^2 + r^2 - 2rs \cos \theta} s^2 ds d\theta = - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \rho_f(s) g_r^M(s) s^2 ds, \quad (1.4.6)$$

where

$$g_r^P(s) = \frac{\mathbf{1}_{\{s < r\}}(s)}{r} + \frac{\mathbf{1}_{\{s > r\}}(s)}{s} \quad \text{and} \quad g_r^M(s) = \frac{1}{sr} \ln \left| \frac{r+s}{r-s} \right|.$$

Note that

$$g_r^P(s) = \frac{1}{r} g_1^P\left(\frac{s}{r}\right) \quad \text{and} \quad g_r^M(s) = \frac{1}{r^2} g_1^M\left(\frac{s}{r}\right).$$

Since g_1^P belongs to L^∞ , (1.4.5) yields directly (1.4.3). Next, we remark that g_1^M belongs to $L^k((0, +\infty), s^2 ds)$ for all $k \in (3, +\infty)$, which gives

$$\|g_r^M\|_{L^k((0, +\infty), s^2 ds)} \leq \frac{C}{r^{2-\frac{3}{k}}}.$$

We finally obtain (1.4.4) by applying the Hölder inequality to (1.4.6). Indeed, thanks to interpolation inequalities and under Assumption (H2), $f \in \mathcal{E}_j$ implies that $\rho_f \in L^1 \cap L^{3/2}((0, +\infty), s^2 ds)$. The proof of the lemma is complete. \square

Lemma 1.4.3. *Let $(f_n)_{n \geq 1}$ be a bounded sequence of \mathcal{E}_j such that ρ_{f_n} is radially symmetric. Then there exists $f \in \mathcal{E}_j$ such that, up to a subsequence,*

$$\begin{cases} (i) & f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^6), \\ (ii) & E_{\text{pot}}(f_n) \rightarrow E_{\text{pot}}(f), \\ (iii) & \text{for all } \frac{3}{2} < q < \frac{3(5p-3)}{4p}, \quad \phi_{f_n}^M \rightarrow \phi_f^M \text{ in } L^q(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Proof. Since $p > 1$, we have $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\mathbb{R}^6)$ up to subsequence, which yields (i). Let us prove (ii). The convergence of the Poisson potential energy is well-known, see e.g. [38]. Let us prove the convergence of the Manev potential energy. We remark that

$$E_{pot}^M(f_n) = \|h_{f_n}\|_{L^2}^2 \text{ with } h_{f_n} = (-\Delta)^{-1/4} \rho_{f_n}.$$

Hence, from (1.1.7), we deduce that the sequence h_{f_n} is bounded in L^2 . Moreover, by interpolation, we have that ρ_{f_n} is bounded in $L^1 \cap L^{p_0}$ with $p_0 = \frac{5p-3}{3p-1} \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$ and then, by standard Sobolev inequalities, the sequence $((-\Delta)^\varepsilon h_{f_n})$ is bounded in $L^2(\mathbb{R}^3)$ for $\varepsilon > 0$ small enough. This yields some local compactness and we have $h_{f_n} \rightarrow h_f$ in $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$. Hence, to conclude Item (ii), it suffices to prove a uniform decay at the infinity. For all $R > 0$, we have

$$\begin{aligned} \|h_{f_n}\|_{L^2(|x|>R)} &= \int_{|x|>R} |\phi_{f_n}^M(x)| |\rho_{f_n}(x)| dx \\ &\leq C \|\rho_{f_n}\|_{L^{3/2}} \left(\int_{|x|>R} |\phi_{f_n}^M(x)|^3 dx \right)^{1/3} \\ &\leq C \left(\int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^{9/2}} dx \right)^{1/3} = \frac{C'}{R^{3/2}} \end{aligned}$$

where we used a Hölder inequality, the uniform boundedness of ρ_{f_n} in $L^{3/2}$ and (1.4.4) with $\alpha = 1/2$. Finally, we have proved that $h_{f_n} \rightarrow h_f$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$, which gives in particular $E_{pot}^M(f_n) \rightarrow E_{pot}^M(f)$.

The proof of (iii) is similar. It is sufficient to remark that $\phi_{f_n}^M = (-\Delta)^{-1/2} \rho_{f_n}$ to obtain the local compactness of $(\phi_{f_n}^M)$ in $L^q(\mathbb{R}^3)$ and the uniform decay at the infinity, given by 1.4.4, enables to conclude. \square

Acknowledgements. We thank Naoufel Ben Abdallah for the proof of (1.3.3) from (1.3.1) and (1.3.2).

Chapter 2

Self-similar blow-up solutions for the pure Vlasov-Manev system

N.B. : Nous présentons dans ce chapitre la deuxième partie d'un article à paraître dans SIMA, SIAM Journal of Mathematical Analysis. Ce travail a été fait en collaboration avec Mohammed Lemou et Florian Méhats.

Abstract: In this chapter, we study the existence of blow-up self-similar solutions to the pure Vlasov-Manev system. For this particular case of the Vlasov-Manev system the potential is restricted to the Manev correction in $-1/r^2$. As stated in the chapter 1 this case can be compared with the Vlasov-Poisson system in dimension 4: the homogeneity of these both systems implies the instability of ground states. Hence around ground states built in chapter 1 we prove the existence of exact self-similar blow-up solutions to the Vlasov-Manev equation. This construction is based on a suitable variational problem with equimeasurability constraint. Indeed classical finite constraint would not provide the separation of the stationary states. To solve such a problem we develop new methods of rearrangement with respect to the microscopic energy.

2.1 Main result

We recall first the expression of the pure Vlasov-Manev system

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t = 0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

in which the potential ϕ_f satisfies

$$\phi_f(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(t, y)}{2\pi^2 |x - y|^2} dy, \quad (2.1.2)$$

and the density ρ_f is defined by

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv.$$

For this system we constructed in the previous chapter ground states by minimizing the constant in the interpolation inequality (1.1.7) and we only proved a blow-up stability of these stationary states. More precisely one may not be aimed at a better stability than this blow-up stability in the pure Manev case. Indeed the classical stability does not hold as shown by the following example (translating the pseudo-conformal symmetry property in this case): let $g = g(x, v)$ be a steady state of (2.1.1) in the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$), then the function f_T defined by

$$f_T(t, x, v) = g\left(\frac{Tx}{T-t}, \frac{T-t}{T}v + \frac{x}{T}\right),$$

is a blow-up solution to the system (2.1.1) in the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$), see [13, 14].

To go further with the pure Manev system we prove in this chapter the existence of exact self-similar solutions to this system and in particular we construct a continuous family of blow-up solutions around each ground state. Remark that for the Vlasov-Poisson system in dimension 4 with which the structure of the equation in the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$) can be compared, blow-up self-similar profiles and pseudo-conformal symmetry are exhibited (see [39]).

We used the same notations as chapter 1. Recall that the energy space is defined by

$$\mathcal{E}_j = \{f \geq 0 \text{ such that } \|f\|_{\mathcal{E}_j} := \|f\|_{L^1} + \|j(f)\|_{L^1} + \||v|^2 f\|_{L^1} < +\infty\} \quad (2.1.3)$$

where the function $j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfying the following hypotheses.

(H1) j is a \mathcal{C}^2 function, with $j(0) = j'(0) = 0$ and such that $j''(t) > 0$ for $t > 0$.

(H2) There exist $p, q > 3$ such that

$$p \leq \frac{tj'(t)}{j(t)} \leq q, \quad \forall t > 0. \quad (2.1.4)$$

Thanks of Theorem 1.1.1, we consider $M_1, M_j > 0$ two positive constants such that $J(M_1, M_2) = 1$ and Q a steady state of (2.1.1) in the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$) defined as a minimizer of the variational problem

$$J(M_1, M_j) = \inf_{f \in \mathcal{F}(M_1, M_j)} K(f), \quad \text{with } K(f) := \frac{\||v|^2 f\|_{L^1}}{E_{pot}^M(f)}. \quad (2.1.5)$$

From Theorem 1.1.1 and Lemma 1.1.2 the compactly supported function Q as minimizer of (2.1.5) is unique under two constraints : its measurability (*i.e.* its distributional function) and its kinetic energy.

The following theorem gives the existence of exact spherically symmetric self-similar solutions to the pure Manev system, (we recall that a spherically symmetric function, in

this context, is a function which only depends on $|x|$, $|v|$ and $x \cdot v$). The uniqueness of the minimizer under equimeasurable constraints is again used, together with the help of suitable rearrangement techniques as introduced in [42, 41], to prove this existence, and in particular to build a continuous family of blow-up solutions around each minimizer.

Theorem 2.1.1 (Exact self-similar solutions in the pure Manev case). *Let Q be a steady state of (2.1.1) in the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$), which minimizes (2.1.5). Then there exists a constant $b^* > 0$ such that for all $b \in [0, b^*]$, there exists a compactly supported spherically symmetric stationary profile $Q_b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^6)$ having the form*

$$Q_b(x, v) = F_b \left(\frac{|v|^2}{2} + bx \cdot v + \phi_{Q_b}(x) \right)$$

on its support, and such that, for all $T > 0$, the function

$$f(t, x, v) = Q_b \left(\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v \right) \quad \text{with } \lambda(t) = \sqrt{2b(T-t)} \quad (2.1.6)$$

is an exact self-similar blow-up solution to the pure Manev system (2.1.1) in \mathcal{E}_j . Here, the function ϕ_{Q_b} belongs to \mathcal{C}^1 and the function F is a continuous nonnegative function on \mathbb{R} , which is \mathcal{C}^1 on $] -\infty, e_b[$ for some $e_b < 0$ and vanishes on $[e_b, +\infty[$. Moreover, Q_b converges to $Q_0 = Q$ in \mathcal{E}_j as $b \rightarrow 0$.

Remark 2.1.2. The previous results show that, in the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$), around the ground state Q , there are at least three classes of dynamical profiles.

(i) *Subcritical solutions.* When the initial data f_0 is subcritical, *i.e.* when

$$J(\|f_0\|_{L^1}, \|j(f_0)\|_{L^1}) > 1 = J(\|Q\|_{L^1}, \|j(Q)\|_{L^1}),$$

then the kinetic energy of the solution $f(t)$ is controlled for all time. Indeed, one has

$$\mathcal{H}(f(t)) \geq \| |v|^2 f \|_{L^1} \left(1 - \frac{1}{K(f(t))} \right) \geq \| |v|^2 f \|_{L^1} \left(1 - \frac{1}{J(\|f_0\|_{L^1}, \|j(f_0)\|_{L^1})} \right).$$

Recall that J is defined by (2.1.5) and is continuous and decreasing with respect to its two arguments.

(ii) *Pseudo-conformal blow-up solutions.* The following family gives an explicit class of finite time blow-up solutions [13, 14]:

$$f(t, x, v) = Q \left(\frac{Tx}{T-t}, \frac{T-t}{T}v + \frac{x}{T} \right), \quad T > 0.$$

Note that the kinetic energy blows up with the rate $(T-t)^{-2}$.

(iii) *Self-similar blow-up solutions.* The family given by (2.1.6) blows up in finite time and the kinetic energy blows up with the rate $(T-t)^{-1}$.

In Subsection 2.2.1 we introduce the rearrangement with respect of a modified microscopic energy and apply it in Subsection 2.2.2 to build self-similar solutions of (1.1.1) in the pure Manev case $\delta = 0$, $\kappa = 1$.

2.2 Self-similar solutions in the pure Manev case

From now on, we only consider the pure Manev case ($\delta = 0$, $\kappa = 1$). This section is devoted to the proof of Theorem 2.1.1. Let Q be a steady state solution to (2.1.1) which minimizes (2.1.5).

We seek, for b small enough, a compactly supported and spherically symmetric stationary profile $Q_b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^6)$, with $\phi_{Q_b} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, such that

$$Q_b \left(\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v \right) \quad \text{with } \lambda(t) = \sqrt{2b(T-t)} \quad (2.2.1)$$

is a solution to (2.1.1) in the pure Manev case. We insert (2.2.1) in (2.1.1), use the identity $\dot{\lambda} = -b/\lambda$ and then get that Q_b has to satisfy (at least in the weak sense) the following equation in the self-similar variables $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v)$ (which are renoted (x, v) for simplicity),

$$v \cdot \nabla_x Q_b - \nabla_x \phi_{Q_b} \cdot \nabla_v Q_b + b(x \cdot \nabla_x Q_b - v \cdot \nabla_v Q_b) = 0. \quad (2.2.2)$$

We first observe that a function of the form

$$g(x, v) = F \left(\frac{|v|^2}{2} + bx \cdot v + \phi_g(x) \right)$$

satisfies this equation. However, for non trivial profiles F and for $b \neq 0$, it can be seen that such a function does not belong to \mathcal{E}_j (it has always infinite mass and energy). To solve this problem we proceed as in [52, 39] and introduce a radial cut-off function χ from \mathbb{R}^3 to $[0, 1]$ such that

$$\chi(x) = 1 \text{ for } |x| < r_\chi \text{ and } \chi(x) = 0 \text{ for } |x| > R_\chi = 2r_\chi,$$

where $r_\chi > 0$ will be defined later on (see (2.2.34)). We shall prove the existence of a function having the form

$$Q_b(x, v) = F \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi_{Q_b}(x) \right), \quad (2.2.3)$$

which is compactly supported in $\{|x| < r_\chi\}$. Here, the function ϕ_{Q_b} belongs to \mathcal{C}^1 and the function F is a continuous nonnegative function on \mathbb{R} , which is \mathcal{C}^1 on $] -\infty, e_0[$ for some $e_0 < 0$ and vanishes on $[e_0, +\infty[$. Hence, we have

$$Q_b(x, v) = F \left(\frac{|v|^2}{2} + bx \cdot v + \phi_{Q_b}(x) \right), \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^6 \text{ such that } |x| < r_\chi,$$

which is sufficient to deduce that Q_b is a solution to (2.2.2).

To construct such self-similar profile Q_b , it is natural to use a minimization problem with constraints. However, if the number of constraints is finite, which is the case for instance if we prescribe the mass and a Casimir functional as in Section 1.2, then the uniqueness of the minimizer is not garanted. This uniqueness property will be crucial to

ensure that Q_b is in the vicinity of Q . Therefore, we will choose a variational problem with an infinite number of constraints which, using Lemma 1.1.2, will lead to a unique minimizer. More precisely, we define the following set of constraints:

$$\text{Eq}(Q) = \{f \in \mathcal{E}_j : f \text{ is equimeasurable with } Q\}. \quad (2.2.4)$$

Then we consider the associated variational problem

$$T_b := \inf \{T_b(f) : f \in \text{Eq}(Q), \text{ spherically symmetric with } E_{\text{pot}}(f) = E_{\text{pot}}(Q)\}, \quad (2.2.5)$$

where

$$T_b(f) = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v \right) f(x, v) dx dv \quad (2.2.6)$$

and we claim the following Proposition.

Proposition 2.2.1. *Let Q be a steady state of (2.1.1) in the pure Manev case which minimizes (2.1.5). Then there exists $b^* > 0$ such that the following holds. For all $b \in [0, b^*]$, the variational problem (2.2.5) has at least one minimizer. Moreover, there exists a family of minimizers Q_b of (2.2.5), taking the form*

$$Q_b(x, v) = F_{Q_b} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \nu_b \phi_{Q_b}(x) \right),$$

where ν_b is a positive constant and $\chi(x)$ has been defined above, and such that, as $b \rightarrow 0$, we have the convergences $\nu_b \rightarrow 1$ and $Q_b \rightarrow Q_0 = Q$ in \mathcal{E}_j . Here, the function Q_b has its support in $\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, |x| < r_\chi\}$, the function ϕ_{Q_b} belongs to \mathcal{C}^1 and the function F_{Q_b} is a continuous nonnegative function on \mathbb{R} , which is \mathcal{C}^1 on $] -\infty, e_b[$ for some $e_b < 0$ and vanishes on $[e_b, +\infty[$.

This result will be proved in the sections below. Now, using this Proposition 2.2.1, we end the proof of Theorem 2.1.1. To obtain the desired form (2.2.3) we first rescale the function Q_b given by this proposition as follows:

$$\bar{Q}_b(x, v) = Q_b \left(x, \frac{v}{\nu_b} \right)$$

and set $\tilde{b} = \nu_b b$. This ensures that \bar{Q}_b is a function of

$$\frac{|v|^2}{2} + \tilde{b}\chi(x)x \cdot v + \phi_{\bar{Q}_b}(x).$$

Denoting back \bar{Q}_b and \tilde{b} by Q_b and b respectively, we can conclude that we have constructed a function Q_b of the desired form. To prove that this function is a solution to (2.2.2), we need the continuity of Q_b on \mathbb{R}^6 and its \mathcal{C}^1 regularity in the interior of its support. This regularity can be deduced in a similar way as for Q , see Section 1.2.2, Step 3. The proof of Theorem 2.1.1 is complete. It remains to prove Proposition 2.2.1. For this purpose, we need some tools which we introduce in the following subsection.

2.2.1 Reduction to a functional of a modified microscopic energy

Let us first define

$$\Phi_{rad} = \{\phi_f, f \in \mathcal{E}_{j,rad}\}, \text{ with } \mathcal{E}_{j,rad} = \{f \in \mathcal{E}_j, f \text{ spherically symmetric}\}. \quad (2.2.7)$$

From Lemma 1.4.2, we deduce that there exists a constant $C > 0$ such that, for all $\phi_f \in \Phi_{rad}$, we have

$$\phi_f(r) \geq -\frac{C}{r^{3/2}} \|f\|_{\mathcal{E}_j}. \quad (2.2.8)$$

Moreover, by interpolation and using (H2), we have

$$\|\rho_f\|_{L^1} + \|\rho_f\|_{L^\alpha} \leq C \|f\|_{\mathcal{E}_j}, \quad \alpha = \frac{5p-3}{3p-1}.$$

Therefore, from Hardy-Littlewood-Sobolev, one deduces that $\phi_f \in L^k$, for all $\frac{3}{2} < k \leq \frac{3(5p-3)}{4p}$, and in particular, since $p > 3$, one has

$$\|\phi_f\|_{L^3} \leq C \|f\|_{\mathcal{E}_j}. \quad (2.2.9)$$

As we said, we shall construct Q_b as a minimizer of the functional T_b defined by (2.2.6) under equimeasurability constraint. Similarly as in [41, 42], the key tool to study this variational problem is the symmetrization with respect to the microscopic energy $\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x)$. Before defining this symmetrization, we need to introduce and study the Jacobian associated with this change of variable.

Lemma 2.2.2 (Definition and properties of the Jacobian $a_{b,\phi}$). *Let $\phi \in \Phi_{rad} \setminus \{0\}$ and $b \in \mathbb{R}_+$. Defining the Jacobian function $a_{b,\phi} : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ as*

$$a_{b,\phi}(e) = \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) < e \right\}, \quad \forall e < 0,$$

where "meas" stands for the Lebesgue measure on \mathbb{R}^6 , we have the following properties.

(i) The Jacobian $a_{b,\phi}$ is given by the explicit formula

$$\forall e < 0, \quad a_{b,\phi}(e) = \frac{32\pi^2\sqrt{2}}{3} \int_0^{+\infty} \left(e - \phi(r) + \frac{(b\chi(r)r)^2}{2} \right)_+^{3/2} r^2 dr. \quad (2.2.10)$$

(ii) Let $e_{b,\phi} = \inf \text{ess} \left[\phi(r) - \frac{(b\chi(r)r)^2}{2} \right] \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$. Then $a_{b,\phi}(e) = 0$ for all $e \leq e_{b,\phi}$ and $a_{b,\phi}$ is a strictly increasing \mathcal{C}^1 diffeomorphism from $(e_{b,\phi}, 0)$ onto \mathbb{R}_+^* . We will denote by $a_{b,\phi}^{-1}$ the inverse function of $a_{b,\phi}$.

(iii) Let (f_n) be a bounded sequence in $\mathcal{E}_{j,rad} \setminus \{0\}$ and let (e_n, b_n) be a sequence in $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}^+$ and assume that there exist $f \in \mathcal{E}_{j,rad} \setminus \{0\}$, $e \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ and $b \in \mathbb{R}^+$ such that

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^6), \quad e_n \rightarrow e \text{ and } b_n \rightarrow b.$$

Then, by denoting $a_{b,\phi_f}(-\infty) = 0$ and $a_{b,\phi_f}(0) = +\infty$, we have

$$a_{b_n,\phi_{f_n}}(e_n) \rightarrow a_{b,\phi_f}(e) \quad \text{and} \quad \forall s > 0, \quad a_{b_n,\phi_{f_n}}^{-1}(s) \rightarrow a_{b,\phi_f}^{-1}(s).$$

Proof. Proof of (i). We remark that

$$\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v = \frac{1}{2}|v + b\chi(x)x|^2 - \frac{(b\chi(x)|x|)^2}{2}.$$

Hence, by performing the change of variable $w = v + b\chi(x)x$ with respect to the variable v , and passing by the spherical coordinate we find

$$a_{b,\phi}(e) = (4\pi)^2 \int r^2 dr \int \mathbb{1}_{\{\frac{u^2}{2} + \phi(r) - \frac{(b\chi(r)r)^2}{2} < e\}} u^2 du.$$

Formula (2.2.10) follows. Since $\phi \in \Phi_{rad} \setminus \{0\}$, we have both the control (2.2.8) and the fact that the set $\{x \in \mathbb{R}^3, \phi(x) < e\}$ is bounded. These two properties ensure that the integral in (2.2.10) is finite.

Proof of (ii). By dominated convergence, we deduce that $e \mapsto a_{b,\phi}(e)$ is \mathcal{C}^1 on \mathbb{R}_+^* with

$$a'_{b,\phi}(e) = 16\pi^2 \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \left(e - \phi(r) + \frac{(b\chi(r)r)^2}{2} \right)_+^{1/2} r^2 dr \geq 0.$$

For $e_{b,\phi} < e < 0$, we have clearly $a'_{b,\phi}(e) > 0$. Let us prove that $a_{b,\phi}(e)$ converges to $+\infty$ as $e \rightarrow 0$. We observe that, for $f \in \mathcal{E}_{j,rad} \setminus \{0\}$ there exists $R > 0$ such that $\|f_R\|_{L^1} = \frac{1}{2}\|f\|_{L^1}$, where $f_R = f\mathbb{1}_{|x| < R}$. Thus one can prove that

$$|\phi_f(r)| \geq |\phi_{f_R}(r)| \sim \frac{\|f_R\|_{L^1}}{2\pi^2 r^2} \quad \text{as } r \rightarrow +\infty, \quad (2.2.11)$$

which gives

$$a_{b,\phi}(e) \geq C \int_0^{+\infty} \left(e + \frac{C}{1+r^2} \right)^{3/2} r^2 dr.$$

Hence, $a_{b,\phi}(e) \rightarrow +\infty$ as $e \rightarrow 0$. Since, we have clearly $a_{b,\phi}(e_{b,\phi}) = 0$, item (ii) is proved.

Proof of (iii). The sequence (f_n) is bounded in $\mathcal{E}_{j,rad}$. Then, from Lemma 1.4.3 in Appendix B, up to extraction of a subsequence, we have in particular

$$\phi_{f_n} \rightarrow \phi_f \text{ almost everywhere.}$$

From (2.2.8) and the boundedness of (f_n) in $\mathcal{E}_{j,rad}$, we have

$$\phi_{f_n}(r) \geq -\frac{C}{r^{3/2}}.$$

Thus

$$e_n - \phi_{f_n}(r) + \frac{(b_n\chi(r)r)^2}{2} \leq e_n + \frac{C}{r^{3/2}} + \frac{(b_n\chi(r)r)^2}{2} \rightarrow e_n$$

when r converges to the infinity. Since $e_n \rightarrow e$ as $n \rightarrow +\infty$, this implies that, for $e \in [-\infty, 0)$, the function

$$r \mapsto \left(e_n - \phi_{f_n}(r) + \frac{(b_n\chi(r)r)^2}{2} \right)_+$$

is uniformly compactly supported. Therefore, by dominated convergence, we deduce that

$$a_{b_n, \phi_{f_n}}(e_n) \rightarrow a_{b, \phi_f}(e).$$

Let us now treat the case $e = 0$. Remark first that for all $n \in \mathbb{N}$, we have

$$a_{b_n, \phi_n}(e_n) \geq a_{0, \phi_n}(e_n),$$

and thus it is sufficient to prove that $a_{0, \phi_n}(e_n)$ converges to $a_{b, \phi}(0) = +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$. Let $M > 0$ be an arbitrary constant. We know that

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad |\phi_f(x)| \geq \frac{C_f}{1 + |x|^2}. \quad (2.2.12)$$

Denote $\Omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, |\phi_{f_n}(x)| < \frac{C_f}{2(1+|x|^2)} \right\}$ and let $e_0 < 0$ be such that

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(e_0 + \frac{C_f}{2(1+|x|^2)} \right)_+^{3/2} dx > \frac{3M}{4\pi\sqrt{2}}.$$

For n large enough, we have $e_n > e_0$ and thus

$$\begin{aligned} a_{0, \phi_n}(e_n) &\geq \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_n} \left(e_0 + \frac{C_f}{2(1+|x|^2)} \right)_+^{3/2} dx \\ &\geq 2M - \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \int_{\Omega_n} \left(e_0 + \frac{C_f}{2(1+|x|^2)} \right)_+^{3/2} dx. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

To prove that the second term converges to 0 as $n \rightarrow +\infty$, we remark that the set of integration of this term has the form $\Omega_n \cap B(0, R)$ with $R > 0$ independent of n . Now, from (2.2.12) and from the definition of Ω_n ,

$$\|\phi_{f_n}(x) - \phi_f(x)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 \geq \int_{\Omega_n} \left(\frac{C_f}{2(1+|x|^2)} \right)^3 dx \geq \int_{\Omega_n \cap B(0, R)} \left(\frac{C_f}{2(1+|x|^2)} \right)^3 dx.$$

Since ϕ_{f_n} converges to ϕ_f in $L^3(\mathbb{R}^3)$ by Lemma 1.4.3, we deduce that the measure of the set $\Omega_n \cap B(0, R)$ converges to 0, which implies that the integral

$$\int_{\Omega_n \cap B(0, R)} \left(e_0 + \frac{C_f}{2(1+|x|^2)} \right)_+^{3/2} dx$$

converges to 0 as $n \rightarrow +\infty$. Thus, for n large enough, $a_{b_n, \phi_n}(e_n) \geq a_{0, \phi_n}(e_n) \geq M$. which concludes the proof of the convergence of $a_{b_n, \phi_n}(e_n)$.

Now, we shall prove that for all $s \in \mathbb{R}_+^*$, we have $a_{b_n, \phi_{f_n}}^{-1}(s) \rightarrow a_{b, \phi_f}^{-1}(s)$. Let $e_n := a_{b_n, \phi_{f_n}}^{-1}(s)$. We know from the above result that, if e_n converges to $e \in [-\infty, 0]$, then

$$s = a_{b_n, \phi_{f_n}}(e_n) \rightarrow a_{b, \phi_f}(e).$$

Hence, the sequence (e_n) converges to $e = a_{b, \phi_f}^{-1}(s)$. The proof of Lemma 3.4.1 is complete. \square

Now, we are ready to construct our symmetrization of f with respect to a given microscopic energy $\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x)$. For this purpose, we first recall that the Schwarz symmetrization Q^* of the function Q is the unique nonincreasing function on \mathbb{R}^+ such that

$$\forall \lambda > 0, \quad \mu_{Q^*}(\lambda) = \mu_Q(\lambda),$$

where

$$\mu_{Q^*}(\lambda) = \text{meas}\{s \in \mathbb{R}^+ : Q^*(s) > \lambda\}, \quad \mu_Q(\lambda) = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6 : Q(x, v) > \lambda\},$$

and where the notation "meas" stands for the Lebesgue measure respectively on \mathbb{R}^+ and \mathbb{R}^6 . Note that Q^* is compactly supported and continuous (since Q is compactly supported and continuous). We shall denote

$$r_* = \min\{r \in \mathbb{R}^+ : Q^*(r) = 0\}. \quad (2.2.14)$$

Lemma 2.2.3 (Rearrangement with respect to the microscopic energy). *Let $\phi \in \Phi_{rad} \setminus \{0\}$ and $b \geq 0$. We denote by $Q^{*b,\phi}$ the nonincreasing continuous function of the microscopic energy defined by*

$$Q^{*b,\phi}(x, v) = \begin{cases} Q^* \circ a_{b,\phi} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) & \text{if } \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) < 0, \\ 0 & \text{if } \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \geq 0. \end{cases}$$

Then the following holds.

(i) The function $Q^{*b,\phi}$ is compactly supported and

$$\text{Supp}(Q^{*b,\phi}) = \left\{ \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) < a_{b,\phi}^{-1}(r_*) \right\},$$

where r_* is defined by (2.2.14).

(ii) We have $Q^{*b,\phi} \in \text{Eq}(Q)$ and

$$\int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 Q^{*b,\phi}(x, v) dx dv \leq C(\|\phi\|_{L^3}^2 + b^2). \quad (2.2.15)$$

(iii) Let (f_n) be a bounded sequence of $\mathcal{E}_{j,rad} \setminus \{0\}$ and let (b_n) be a sequence of \mathbb{R}^+ such that $f_n \rightharpoonup f \neq 0$ in $L^p(\mathbb{R}^6)$ and $b_n \rightarrow b$. Then,

$$Q^{*b_n, \phi_{f_n}} \rightarrow Q^{*b, \phi_f} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^p(\mathbb{R}^6).$$

(iv) For all $f \in \text{Eq}(Q)$, spherically symmetric, and for all $\nu > 0$, we have

$$\int \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \nu\phi_f(x) \right) \left(Q^{*b, \nu\phi_f}(x, v) - f(x, v) \right) dx dv \leq 0 \quad (2.2.16)$$

with equality if, and only if, $f = Q^{*b, \nu\phi_f}$.

Proof. We first remark that property (i) is a direct consequence of the definition of $Q^{*b,\phi}$. *Proof of (ii).* Recall that, for all $\lambda > 0$,

$$\mu_{Q^{*b,\phi}} = \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad Q^{*b,\phi}(x, v) > \lambda \right\}. \quad (2.2.17)$$

If $\lambda \geq Q^*(0) = \|Q\|_{L^\infty}$, we clearly have $\mu_{Q^{*b,\phi}}(\lambda) = 0 = \mu_Q(\lambda)$. If $\lambda < Q^*(0)$, then we have

$$\begin{aligned} \mu_{Q^{*b,\phi}}(\lambda) &= \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, a_{b,\phi} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) < \sup\{r, Q^*(r) > \lambda\} \right\} \\ &= \sup\{r, Q^*(r) > \lambda\} = \mu_Q(\lambda). \end{aligned}$$

Thus the functions $Q^{*b,\phi}$ and Q are equimeasurable. To estimate its kinetic energy, we remark that

$$T_b(Q^{*b,\phi}) \geq \int \left(\frac{|v|^2}{2} - bR_\chi|v| \right) Q^{*b,\phi} \geq \frac{1}{4} \int |v|^2 Q^{*b,\phi} - b^2 R_\chi^2 \|Q\|_{L^1}. \quad (2.2.18)$$

Moreover, from the definition of $Q^{*b,\phi}$, one deduces that

$$\begin{aligned} T_b(Q^{*b,\phi}) &= \int \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) Q^{*b,\phi}(x, v) dx dv - \int \phi(x) Q^{*b,\phi}(x, v) dx dv \\ &\leq - \int \phi(x) Q^{*b,\phi}(x, v) dx dv \leq \|\phi\|_{L^3} \|\rho_{Q^{*b,\phi}}\|_{L^{3/2}} \\ &\leq C \|\phi\|_{L^3} \|Q^{*b,\phi}\|_{L^3}^{1/2} \| |v|^2 Q^{*b,\phi} \|_{L^1}^{1/2} \leq C \|\phi\|_{L^3} \| |v|^2 Q^{*b,\phi} \|_{L^1}^{1/2}, \end{aligned}$$

where we used an interpolation inequality and $\|Q^{*b,\phi}\|_{L^3} = \|Q\|_{L^3}$. Combining this with (2.2.18) gives the control of the kinetic energy (2.2.15).

Proof of (iii). From the continuity of Q^* and from Lemma 3.4.1 (ii) and (iii), we clearly have, for any sequence $e_n \rightarrow e$,

$$Q^* \circ a_{b_n, \phi_{f_n}}(e_n) \rightarrow Q^* \circ a_{b, \phi_f}(e).$$

Moreover, by Lemma 1.4.3, up to a subsequence, $\phi_{f_n} \rightarrow \phi_f$ almost everywhere in \mathbb{R}^6 . Denoting

$$e_n(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + b_n \chi(x)x \cdot v + \phi_{f_n}(x), \quad e(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + b \chi(x)x \cdot v + \phi_f(x),$$

we deduce that

$$\text{for a.e. } (x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad e_n(x, v) \rightarrow e(x, v).$$

Thus Q^{*b_n, ϕ_n} converges to $Q^{*b, \phi}$ almost everywhere in \mathbb{R}^6 and the equimeasurability of Q^{*b_n, ϕ_n} and $Q^{*b, \phi}$ gives the convergence in $L^1 \cap L^p$.

Proof of (iv). Let $f \in \text{Eq}(Q)$ be spherically symmetric and let $\nu > 0$. We have $\phi := \nu \phi_f = \phi_{\nu f} \in \Phi_{\text{rad}} \setminus \{0\}$. We denote $\bar{f} = Q^{*b, \phi}$ and we use the layer cake representation

$$f(x, v) = \int_{t=0}^{\|f\|_\infty} \mathbf{1}_{t < f(x, v)} dt.$$

Then from Fubini's theorem,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^6} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) (f(x, v) - \bar{f}(x, v)) \, dx dv \\
&= \int_{t=0}^{\|f\|_\infty} dt \int_{\mathbb{R}^6} \left(\mathbf{1}_{t < f(x, v)} - \mathbf{1}_{t < \bar{f}(x, v)} \right) \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) \, dx dv \\
&= \int_{t=0}^{\|f\|_\infty} dt \int_{\mathbb{R}^6} \left(\mathbf{1}_{\bar{f}(x, v) \leq t < f(x, v)} - \mathbf{1}_{f(x, v) \leq t < \bar{f}(x, v)} \right) \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) \, dx dv \\
&= \int_{t=0}^{\|f\|_\infty} dt \left(\int_{S_1(t)} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) \, dx dv - \int_{S_2(t)} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) \, dx dv \right),
\end{aligned}$$

with

$$S_1(t) = \{\bar{f}(x, v) \leq t < f(x, v)\}, \quad S_2(t) = \{f(x, v) \leq t < \bar{f}(x, v)\}.$$

Now, from the equimeasurability of f and \bar{f} , we have

$$\forall t > 0, \quad \text{meas}(S_1(t)) = \text{meas}(S_2(t))$$

and, since \bar{f} is a nonincreasing function of $\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x)$,

$$\begin{aligned}
a_2(t) &= \sup_{(x, v) \in S_2(t)} \left\{ \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right\} \\
&\leq \inf_{(x, v) \in S_1(t)} \left\{ \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right\} = a_1(t).
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
\int_{S_2(t)} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) \, dx dv &\leq \text{meas}(S_2(t))a_2(t) \leq \text{meas}(S_1(t))a_1(t) \\
&\leq \int_{S_1(t)} \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi(x) \right) \, dx dv,
\end{aligned}$$

which yields (2.2.16). In the case of equality in this above chain of inequalities, it is easy to prove that $f = \bar{f}$, see for instance [41, 42]. \square

2.2.2 Existence of self-similar solutions

The goal of this subsection is to prove Proposition 2.2.1.

Step 1: uniform bounds. Let $0 < b \leq 1$ be given. In this step, we prove that T_b is finite and that there exists $C^* > 0$, independent of b , such that every minimizing sequence $(f_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$ of (2.2.5) satisfies, for n large enough,

$$\|f_n^b\|_{\mathcal{E}_j} \leq C^*. \quad (2.2.19)$$

For all $(x, v) \in \mathbb{R}^6$, we have

$$\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v \geq \frac{|v|^2}{2} - bR_\chi|v| \geq \frac{|v|^2}{4} - b^2R_\chi^2$$

and so, for all $f \in \text{Eq}(Q)$, we have

$$T_b(f) \geq \frac{1}{4} \int |v|^2 f - b^2 R_\chi^2 \|Q\|_{L^1}. \quad (2.2.20)$$

This shows that $T_b > -\infty$. Moreover, if $(f_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$ is a minimizing sequence of the variational problem (2.2.5), then for n large enough we have

$$T_b(f_n^b) \leq 1 + T_b \leq 1 + T_b(Q) \leq 1 + C \int |v|^2 Q.$$

This, combined with (2.2.20) yields the existence of C^* .

Step 2. For all $b \in \mathbb{R}_+$, let $(f_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$ be a minimizing sequence for (2.2.5). In this step, we show that there exists a sequence (ν_n^b) of positive numbers such that $(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}})$, defined by Lemma 2.2.3, is also a minimizing sequence of (2.2.5). The interest of this new minimizing sequence is its compactness property, as it will be proved in the third step.

Lemma 2.2.4. *There exists $b^* > 0$ such that the following holds true. For all $b \in [0, b^*]$ and for all minimizing sequences $(f_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$ of the variational problem (2.2.5), there exist $0 < \nu^- < \nu^+$ and a sequence of positive numbers $(\nu_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[\nu^-, \nu^+]$ such that, up to a subsequence, we have $E_{\text{pot}}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) = E_{\text{pot}}(Q)$. Moreover, we have $T_b(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) \leq T_b(f_n^b)$ with equality if and only if $Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}} = f_n^b$.*

Proof of Lemma 2.2.4. Let $b > 0$ be given and consider a minimizing sequence $(f_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$ of the variational problem (2.2.5). From Step 1, we know that (for n large enough), this sequence satisfies the bound (2.2.19).

We first observe that $\nu \mapsto E_{\text{pot}}(Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}})$ is continuous on \mathbb{R}_+^* . Indeed, by Lemma 2.2.3 (iii), we know that $\nu \mapsto Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}}$ is continuous from \mathbb{R}_+^* to $L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^p(\mathbb{R}^6)$. Hence, from the kinetic control (2.2.15) and Lemma 1.4.3 of Appendix B, one deduces the continuity of $\nu \mapsto E_{\text{pot}}(Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}})$.

We claim now that, for b small enough, there exist $0 < \nu^- < \nu^+$ such that, up to a subsequence with respect to n , we have

$$E_{\text{pot}}(Q^{*b, \nu^- \phi_{f_n^b}}) < E_{\text{pot}}(Q) < E_{\text{pot}}(Q^{*b, \nu^+ \phi_{f_n^b}}). \quad (2.2.21)$$

Since $Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}} \in \text{Eq}(Q)$, we have, by (1.1.7),

$$0 < E_{\text{pot}}(Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}}) \leq C \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}}(x, v) dx dv. \quad (2.2.22)$$

Furthermore, the control of the kinetic energy (2.2.15), together with (2.2.9), gives

$$\int |v|^2 Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}} \leq C(\nu^2 \|f_n^b\|_{\mathcal{E}_j}^2 + b^2) \leq C((C^* \nu)^2 + b^2),$$

where we also used (2.2.19). Hence from (2.2.22), one deduces that there exist $b_1^* \in (0, 1]$ and $\nu^- > 0$ such that for all $b \in [0, b_1^*]$ and for all n , we have

$$E_{pot}(Q^{*b, \nu^- \phi_{f_n^b}}) < E_{pot}(Q).$$

Note that b_1^* depends only on Q , and does not depend on the sequence (f_n^b) .

Let us now prove the second part of the claim (2.2.21). Since the sequence $(f_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in \mathcal{E}_j , Lemma 1.4.3 of Appendix B in chapter 1 implies that there exists $f_b \in \mathcal{E}_{j, rad}$ such that up to a subsequence, as $n \rightarrow +\infty$,

$$f_n^b \rightharpoonup f_b \text{ in } L^p(\mathbb{R}^6), \quad E_{pot}(f_b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{pot}(f_n^b) = E_{pot}(Q).$$

In particular, $f_b \neq 0$ and, by Lemma 2.2.3 (iii), for all $\nu > 0$ we have

$$Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}} \rightarrow Q^{*b, \nu \phi_{f_b}} \text{ in } L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^p(\mathbb{R}^6) \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Thus, from the kinetic control (2.2.15), $(Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}})$ is bounded in \mathcal{E}_j and spherically symmetric, which implies that $E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_{f_n^b}})$ converges to $E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_{f_b}})$ as $n \rightarrow +\infty$. Consequently, to prove the claim (2.2.21), it is sufficient to show that, if b is small enough, there exists ν^+ such that $E_{pot}(Q^{*b, \nu^+ \phi_{f_b}}) > E_{pot}(Q)$. This result will be a consequence of the following lemma, which is proved later.

Lemma 2.2.5. *There exists $b_2^* > 0$ such that the following holds true. For all $f \in \mathcal{E}_{j, rad}$ satisfying*

$$E_{pot}(f) = E_{pot}(Q), \quad \|f\|_{L^1} \leq \|Q\|_{L^1}, \quad \|j(f)\|_{L^1} \leq \|j(Q)\|_{L^1} \quad (2.2.23)$$

and

$$T_b(f) + \frac{(bR_\chi)^2}{2} \|f\|_{L^1} \leq T_b + \frac{(bR_\chi)^2}{2} \|Q\|_{L^1}, \quad (2.2.24)$$

for some $b \in [0, b_2^*]$, we have

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} E_{pot}(Q^{*b, \nu \phi_f}) > E_{pot}(Q). \quad (2.2.25)$$

Before proving Lemma 2.2.5, let us use it to end the proof of Lemma 2.2.4 and Proposition 2.2.1. Let us check that f_b satisfies the assumptions of Lemma 2.2.5, for $b \leq b_2^*$. Note that b_2^* given by this lemma is independent of the function f_b . First, f_b satisfies Assumption (2.2.23) because of the weak convergence of (f_n^b) to (f_b) and of the strong convergence of the potential energies. To prove that f_b satisfies Assumption (2.2.24), we remark that

$$\forall (x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad \frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \frac{(bR_\chi)^2}{2} = \frac{|v + b\chi(x)x|^2}{2} + \frac{(bR_\chi)^2 - (b\chi(x)|x|)^2}{2} \geq 0.$$

Hence, by lower semicontinuity, one has

$$T_b(f_b) + \frac{(bR_\chi)^2}{2} \|f_b\|_{L^1} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(T_b(f_n^b) + \frac{(bR_\chi)^2}{2} \|f_n^b\|_{L^1} \right) = T_b + \frac{(bR_\chi)^2}{2} \|Q\|_{L^1}.$$

Therefore, we may apply Lemma 2.2.5 and get the existence of ν^+ such that, for $b \leq b_2^*$,

$$E_{pot}(Q^{*b, \nu^+ \phi_{f_b}}) > E_{pot}(Q).$$

Hence the claim (2.2.21) holds true for all $0 \leq b \leq b^* = \min(b_1^*, b_2^*)$. Note that b^* is independent of the sequence (f_n^b) . One can chose $\nu_n^b \in [\nu^-, \nu^+]$ such that for all n , we have $E_{pot}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) = E_{pot}(Q)$.

Now, it remains to show the second part of Lemma 2.2.4. We have

$$\begin{aligned} T_b(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) &= \int \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \nu_n^b \phi_{f_n^b}(x) \right) Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}(x, v) dx dv \\ &\quad - \nu_n^b \int \phi_{f_n^b}(x) Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}(x, v) dx dv \\ &\leq T_b(f_n^b) + \nu_n^b \int \phi_{f_n^b}(x) f_n^b(x, v) dx dv - \nu_n^b \int \phi_{f_n^b}(x) Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}(x, v) dx dv, \end{aligned}$$

from the inequality (2.2.16). Observing that

$$- \int \phi_{f_n^b}(x) Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}(x, v) dx dv = \frac{1}{2} \left(E_{pot}(f_n^b) + E_{pot}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) - E_{pot}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}} - f_n^b) \right),$$

we get

$$T_b(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) \leq T_b(f_n^b) + \frac{\nu_n^b}{2} \left(E_{pot}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) - E_{pot}(f_n^b) \right) - \frac{\nu_n^b}{2} E_{pot}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}} - f_n^b).$$

Since

$$E_{pot}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) = E_{pot}(f_n^b) = E_{pot}(Q),$$

we deduce that $T_b(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) \leq T_b(f_n^b)$. By Lemma 2.2.3 (iv), this inequality becomes an equality if and only if $f_n^b = Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}$. The proof of Lemma 2.2.4 is complete. \square

Step 3: construction of Q_b , minimizer of (2.2.5). Let $b \in [0, b^*]$, where b^* is defined in Lemma 2.2.4, and let f_n^b be a minimizing sequence of the variational problem (2.2.5). Then, the sequence (ν_n^b) given by Lemma 2.2.4 lies in a compact interval $[\nu^-, \nu^+]$. Up to a subsequence, (ν_n^b) converges to some $\bar{\nu}_b > 0$ as $n \rightarrow +\infty$. By Lemma 2.2.3, we have

$$Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}} \rightarrow Q^{*b, \bar{\nu}_b \phi_{f_b}} \text{ in } L^1 \cap L^p,$$

where $f_n^b \rightharpoonup f_b$ in L^p . Moreover, from the kinetic control (2.2.15), $(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}})$ is bounded in $\mathcal{E}_{j, rad}$ and thus,

$$E_{pot}(Q^{*b, \bar{\nu}_b \phi_{f_b}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{pot}(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) = E_{pot}(Q).$$

Let us denote $Q_b := Q^{*b, \bar{\nu}_b \phi_{f_b}}$ and make another rearrangement. Applying Lemma 2.2.4, there exists $\nu_b > 0$ such that

- (i) $E_{pot}(Q^{*b, \nu_b \phi_{Q_b}}) = E_{pot}(Q)$.
- (ii) $T_b(Q^{*b, \nu_b \phi_{Q_b}}) \leq T_b(Q_b)$ with equality only if $Q^{*b, \nu_b \phi_{Q_b}} = Q_b$.

By lower semicontinuity, we have

$$T_b \leq T_b(Q_b) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} T_b(Q^{*b, \nu_n^b \phi_{f_n^b}}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} T_b(f_n^b) = T_b.$$

Therefore $T_b(Q^{*b, \nu_b \phi_{Q_b}}) = T_b(Q_b) = T_b$ which implies that $Q_b = Q^{*b, \nu_b \phi_{Q_b}}$. In particular, Q_b takes the desired form (2.2.3) and similar arguments as in Section 1.2.2, Step 3, give the regularity of Q_b stated in Theorem 2.1.1.

Step 4. We prove here that the above constructed sequence (Q_b) converges to Q in \mathcal{E}_j , as $b \rightarrow 0$. Remark first that $Q_0 = Q$ and then $\nu_0 = 1$. Indeed, we claim that Q_0 and Q are two radially symmetric equimeasurable steady states of (2.1.1) (with $\delta = 0$), which minimize (2.1.5), and have the same kinetic energy. This enables to apply Lemma 1.1.2 (ii) and conclude that $Q_0 = Q$. Let us prove this claim. First, since Q is a steady state of (2.1.1) which minimizes (2.1.5), and since Q_0 is equimeasurable to Q , we have

$$K(Q_0) \geq K(Q) = 1.$$

Second, Q_0 being a minimizer of (2.2.5) with $b = 0$, and since $E_{pot}(Q_0) = E_{pot}(Q)$, we also have

$$K(Q) \geq K(Q_0).$$

This yields $K(Q) = K(Q_0) = 1$ and then Q and Q_0 are both minimizers of (1.1.14). Since these functions are equimeasurable, the claim is proved.

Now, similarly as for (2.2.43), one can prove that

$$\limsup_{b \rightarrow 0} \int \frac{|v|^2}{2} Q_b \leq \int \frac{|v|^2}{2} Q.$$

Moreover, since Q is a minimizer of (2.1.5), the function Q_b satisfies $\int |v|^2 Q_b \geq \int |v|^2 Q$ for all b . Thus, we have

$$\int \frac{|v|^2}{2} Q_b \rightarrow \int \frac{|v|^2}{2} Q \quad \text{as } b \rightarrow 0 \quad (2.2.26)$$

and the sequence (Q_b) satisfies

$$Q_b \in \text{Eq}(Q) \quad \text{and} \quad \frac{\mathcal{H}(Q_b)}{\| |v|^2 Q_b \|_{L^1}} \rightarrow 0.$$

Thus, by Proposition 1.3.1 of chapter 1, one deduces that we have

$$Q_b \left(\lambda_b x, \frac{v}{\lambda_b} \right) \rightarrow Q \text{ in } \mathcal{E}_j, \quad \text{where } \lambda_b = \left(\frac{\| |v|^2 Q \|_{L^1}}{\| |v|^2 Q_b \|_{L^1}} \right)^{1/2}. \quad (2.2.27)$$

From (2.2.26), we finally deduce that $\lambda_b \rightarrow 1$ and that

$$Q_b \rightarrow Q \text{ in } \mathcal{E}_j \quad \text{as } b \rightarrow 0. \quad (2.2.28)$$

Step 5: convergence of (ν_b) as $b \rightarrow 0$. We recall that Q_b takes the form (2.2.3), thus satisfies the equation

$$v \cdot \nabla_x Q_b - \nu_b \nabla_x \phi_{Q_b} \cdot \nabla_v Q_b + b \chi(x) (x \cdot \nabla_x Q_b - v \cdot \nabla_v Q_b) - b(x \cdot v) \nabla_x \chi \cdot \nabla_v Q_b = 0. \quad (2.2.29)$$

We aim to apply Lemma 2.3.1. Multiply the two last terms of (2.2.29) by $x \cdot v$ and integrate on \mathbb{R}^6 . Integrations by parts give

$$\int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) b \chi(x) (x \cdot \nabla_x Q_b - v \cdot \nabla_v Q_b) dx dv = -b \int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) (x \cdot \nabla \chi) Q_b dx dv$$

and

$$- \int_{\mathbb{R}^6} b(x \cdot v)^2 \nabla_x \chi \cdot \nabla_v Q_b dx dv = +2b \int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) (x \cdot \nabla \chi) Q_b dx dv.$$

Then, from Lemma 2.3.1,

$$\nu_b E_{pot}(Q) - \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 Q_b(x, v) dx dv = b \int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) (x \cdot \nabla \chi) Q_b dx dv, \quad (2.2.30)$$

where

$$\left| b \int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) (x \cdot \nabla \chi) Q_b dx dv \right| \leq b R_\chi^2 \|\nabla \chi\|_{L^\infty} \frac{\|Q\|_{L^1} + \| |v|^2 Q_b \|_{L^1}}{2}.$$

Using (2.2.26), (2.2.30) and $\mathcal{H}(Q) = 0$, we obtain $\nu_b \rightarrow 1$ as $b \rightarrow 0$.

Step 6: choice of r_χ . Now, we seek r_χ such that, for all $b \in [0, b^*]$, $\text{Supp}(\rho_{Q_b}) \subset B(0, r_\chi)$. We have seen that Lemma 2.2.3 (i) gives

$$\text{Supp}(Q_b) \subset \left\{ (x, v), \nu_b \phi_{Q_b}(x) < a_{b, \nu_b \phi_{Q_b}}^{-1}(r_*) + \frac{(b^* R_\chi)^2}{2} \right\}, \quad (2.2.31)$$

where r_* is defined by (2.2.14). Remark first that from the continuity of the function $(b, \phi) \mapsto a_{b, \phi}^{-1}(r_*)$ in Lemma 3.4.1, we deduce

$$a_{b, \nu_b \phi_{Q_b}}^{-1}(r_*) \rightarrow a_{0, \phi_Q}^{-1}(r_*) < 0 \quad \text{as } b \rightarrow 0.$$

Let $b_3^* > 0$ small enough such that for all $0 < b < b_3^*$

$$\frac{a_{b, \nu_b \phi_{Q_b}}^{-1}(r_*)}{\nu_b} < \frac{a_{0, \phi_Q}^{-1}(r_*)}{2}, \quad \frac{(b^* R_\chi)^2}{2\nu_b} < \frac{|a_{0, \phi_Q}^{-1}(r_*)|}{4} \quad \text{and} \quad \|Q_b\|_{\mathcal{E}_j} \leq 2\|Q\|_{\mathcal{E}_j},$$

where we recall that $Q_b \rightarrow Q$ in \mathcal{E}_j . Then, for $b \leq \min(b^*, b_3^*)$, (2.2.31) yields

$$\text{Supp}(\rho_{Q_b}) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \quad \phi_{Q_b}(x) < \frac{a_{0, \phi_Q}^{-1}(r_*)}{4} \right\}. \quad (2.2.32)$$

Moreover, by (2.2.8), the function ϕ_{Q_b} satisfies

$$\phi_{Q_b}(x) \geq -\frac{C\|Q_b\|_{\mathcal{E}_j}}{|x|^{3/2}} \geq -\frac{2C\|Q\|_{\mathcal{E}_j}}{|x|^{3/2}}, \quad (2.2.33)$$

where C is a universal constant. Now we set

$$r_\chi = \left(\frac{8C\|Q\|_{\mathcal{E}_j}}{a_{0,\phi_Q}^{-1}(r_*)} \right)^{2/3}, \quad (2.2.34)$$

and observe that, as mentionned in Proposition 2.2.1, the constant r_χ depends only on Q and ϕ_Q . From (2.2.32) and (2.2.33), renoting $b^* = \min(b^*, b_3^*)$, we deduce that, for $0 \leq b \leq b^*$,

$$\text{Supp}(\rho_{Q_b}) \subset \{x \in \mathbb{R}^3, |x| < r_\chi\}.$$

Finally we have just to prove the Lemma 2.2.5 to complete the proof of Proposition 2.2.1. \square

Proof of Lemma 2.2.5. We proceed by contradiction. We suppose that there exists a sequence b_k going to 0 as $k \rightarrow +\infty$ and a sequence (f_k) such that, for all k , the function $f_k \in \mathcal{E}_j$ satisfies (2.2.23), (2.2.24) and

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} E_{\text{pot}}(Q^{*b_k, \nu\phi_{f_k}}) \leq E_{\text{pot}}(Q). \quad (2.2.35)$$

From the Cauchy-Schwarz inequality, we have for all $\nu > 0$

$$-\int_{\mathbb{R}^6} \phi_{f_k} Q^{*b_k, \nu\phi_{f_k}} \leq E_{\text{pot}}(Q^{*b_k, \nu\phi_{f_k}})^{\frac{1}{2}} E_{\text{pot}}(f_k)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.36)$$

and thus the inequality (2.2.35) implies, for all k ,

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} \left(-\int_{\mathbb{R}^6} \phi_{f_k} Q^{*b_k, \nu\phi_{f_k}} \right) \leq E_{\text{pot}}(Q). \quad (2.2.37)$$

Moreover, by Lemma 2.2.3 (i), for all k , we have

$$\begin{aligned} \text{Supp}(Q^{*b_k, \nu\phi_{f_k}}) &\subset \left\{ (x, v), \quad \frac{|v|^2}{2} - b_k R_\chi |v| + \nu\phi_{f_k}(x) < a_{b_k, \nu\phi_{f_k}}^{-1}(r_*) \right\} \\ &\subset \left\{ (x, v), \quad \phi_{f_k}(x) < \frac{a_{b_k, \nu\phi_{f_k}}^{-1}(r_*)}{\nu} + \frac{(b_k R_\chi)^2}{2\nu} \right\}. \end{aligned}$$

Now, from the explicit expression of $a_{b_k, \nu\phi_{f_k}}$ and for $e = a_{b_k, \nu\phi_{f_k}}^{-1}(r_*)$, we get

$$r_* = a_{b_k, \nu\phi_{f_k}}(e) \geq a_{0, \nu\phi_{f_k}}(e) = \nu^{3/2} a_{0, \phi_{f_k}}\left(\frac{e}{\nu}\right),$$

and then,

$$\frac{e}{\nu} + \frac{(b_k R_\chi)^2}{2\nu} \leq a_{0, \phi_{f_k}}^{-1}(\nu^{-3/2} r_*) + \frac{(b_k R_\chi)^2}{2\nu}. \quad (2.2.38)$$

Since, as $\nu \rightarrow +\infty$, the right-hand side of (2.2.38) goes to $a_{0, \phi_{f_k}}^{-1}(0) = -\|\phi_{f_k}\|_{L^\infty} \in [-\infty, 0]$, we deduce that

$$\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} \left(-\int_{\mathbb{R}^6} \phi_{f_k} Q^{*b_k, \nu\phi_{f_k}} \right) \geq \|\phi_{f_k}\|_{L^\infty} \|Q\|_{L^1} \geq \|\phi_{f_k}\|_{L^\infty} \|f_k\|_{L^1} \geq E_{\text{pot}}(f_k). \quad (2.2.39)$$

Hence, from (2.2.37) and $E_{pot}(f_k) = E_{pot}(Q)$, the inequalities in (2.2.39) are all equalities. Thus the sequence (f_k) satisfies for all k ,

$$\|f_k\|_{L^1} = \|Q\|_{L^1} \quad \text{and} \quad \|\phi_{f_k}\|_{L^\infty} \|f_k\|_{L^1} = E_{pot}(Q). \quad (2.2.40)$$

Now we will prove that (f_k) is a minimizing sequence for the variational problem (1.1.14) with $M_1 = \|Q\|_{L^1}$ and $M_j = \|j(Q)\|_{L^1}$. First, from (2.2.24) and (2.2.40), we have $T_{b_k}(f_k) \leq T_{b_k}$. Combining it with

$$T_{b_k}(f_k) \geq \int \frac{|v|^2}{2} f_k - b_k R_\chi \int \frac{1 + |v|^2}{2} f_k \geq (1 - b_k R_\chi) \int \frac{|v|^2}{2} f_k - \frac{b_k R_\chi}{2} \|Q\|_{L^1} \quad (2.2.41)$$

and with

$$T_{b_k} \leq T_{b_k}(Q) = \int \frac{|v|^2}{2} Q \quad (2.2.42)$$

given by the definition of T_{b_k} and the radial symmetry of Q , we obtain

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int \frac{|v|^2}{2} f_k \leq \int \frac{|v|^2}{2} Q. \quad (2.2.43)$$

Finally, using $E_{pot}(f_k) = E_{pot}(Q)$, $\mathcal{H}(Q) = 0$ and the interpolation inequality (1.1.7) which gives a lower bound for $\| |v|^2 f_k \|_{L^1}$, one gets

$$\|f_k\|_{L^1} = \|Q\|_{L^1}, \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \|j(f_k)\|_{L^1} \leq \|j(Q)\|_{L^1} \quad \text{and} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}(f_k)}{\| |v|^2 f_k \|_{L^1}} \leq 0. \quad (2.2.44)$$

Thus, following the proof of Proposition 1.3.1 of chapter 1, one deduces that there exists a minimizer f of the variational problem (2.1.5) with $M_1 = \|Q\|_{L^1}$ and $M_j = \|j(Q)\|_{L^1}$ having the same kinetic energy as Q , and such that, up to a subsequence,

$$\hat{f}_k(x, v) = f_k \left(\lambda_k x, \frac{v}{\lambda_k} \right) \rightarrow f \text{ in } \mathcal{E}_j, \quad \text{where} \quad \lambda_k = \left(\frac{\| |v|^2 Q \|_{L^1}}{\| |v|^2 f_k \|_{L^1}} \right)^{1/2}. \quad (2.2.45)$$

Recall that Q is a steady state of (2.1.1), thus $J(M_1, M_j) = 1$. Since $\int |v|^2 f = \int |v|^2 Q$, this yields $E_{pot}(f) = E_{pot}(Q)$. Furthermore, from

$$E_{pot}(Q) = E_{pot}(f_k) = \lambda_k^2 E_{pot}(\hat{f}_k) \text{ and } E_{pot}(\hat{f}_k) \rightarrow E_{pot}(f) = E_{pot}(Q),$$

we deduce that

$$\lambda_k \rightarrow 1 \text{ as } k \rightarrow +\infty.$$

Moreover, we deduce from Theorem 1.1.1 that f is continuous and satisfies the expression (1.1.15). Therefore ϕ_f cannot be constant on $\text{Supp}(\rho_f)$, which implies

$$E_{pot}(Q) = E_{pot}(f) < \|\phi_f\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} = \|\phi_f\|_{L^\infty} \|Q\|_{L^1}. \quad (2.2.46)$$

On the other hand, from (2.2.40) and the rescaling inequalities of Appendix 1.4.1, we get

$$\|\phi_{\hat{f}_k}\|_{L^\infty} = \lambda_k^2 \frac{E_{pot}(f)}{\|f\|_{L^1}} \rightarrow \frac{E_{pot}(f)}{\|f\|_{L^1}} \text{ as } k \rightarrow +\infty.$$

Hence, since $\phi_{\hat{f}_k}$ converges to ϕ_f in L^3 , we have

$$\|\phi_f\|_{L^\infty} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\phi_{\hat{f}_k}\|_{L^\infty} = \frac{E_{pot}(f)}{\|f\|_{L^1}},$$

which contradicts the strict inequality (2.2.46). The proof of Lemma 2.2.5 is complete. \square

2.3 Appendix: Virial identity

In this Appendix, we prove the following lemma.

Lemma 2.3.1. *Let $f \in \mathcal{E}_j$ be a continuous and compactly supported function which satisfies*

$$v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f^M \cdot \nabla_v f = g \quad (2.3.1)$$

in the distributional sense, where g belongs to $L^1(\mathbb{R}^6)$. Then the following virial identity holds:

$$E_{pot}^M(f) - \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(x, v) dx dv = - \int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) g(x, v) dx dv. \quad (2.3.2)$$

Proof. First, integrations by parts give

$$\int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) (v \cdot \nabla_x f) dx dv = - \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(x, v) dx dv$$

and

$$- \int_{\mathbb{R}^6} (x \cdot v) \nabla_x \phi_f^M \cdot \nabla_v f dx dv = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_f x \cdot \nabla_x \phi_f^M dx.$$

Therefore, it remains to prove that this term is well defined and satisfies

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_f x \cdot \nabla_x \phi_f^M dx = E_{pot}^M(f). \quad (2.3.3)$$

We observe that $\rho_f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ since f is continuous and compactly supported. In particular, we have $(-\Delta)^{1/2} \phi_f^M = -\rho_f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Moreover, from (1.1.3) we get $\phi_f^M \in L^q(\mathbb{R}^3)$ for all $q \in [\frac{3}{2}, +\infty]$, in particular $\phi_f^M \in L^2(\mathbb{R}^3)$. We thus have $\phi_f^M \in H^1(\mathbb{R}^3)$ and the integral in (2.3.3) is well defined.

Let us now regularize the Manev kernel, setting for $\varepsilon > 0$

$$\phi_f^\varepsilon(x) = -(-\Delta)^{-1/2-\varepsilon/2} \rho_f = -C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(y)}{|x-y|^{2-\varepsilon}} dy.$$

We have clearly $\phi_f^\varepsilon \rightarrow \phi_f^M$ in $H^1(\mathbb{R}^3)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and then

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_f x \cdot \nabla_x \phi_f^\varepsilon dx = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_f x \cdot \nabla_x \phi_f^M dx.$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \rho_f x \cdot \nabla_x \phi_f^\varepsilon dx &= (2 - \varepsilon) C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \rho_f(x) \rho_f(y) \frac{x \cdot (x - y)}{|x - y|^{4-\varepsilon}} dx dy \\ &= \frac{2 - \varepsilon}{2} C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(x) \rho_f(y) |x - y|^2}{|x - y|^{4-\varepsilon}} dx dy.\end{aligned}$$

Passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ yields (2.3.3). The proof is complete. \square

Chapter 3

Stable ground states for the relativistic Vlasov-Poisson system

N.B. : Notons que ce chapitre sera prochainement soumis pour publication, ce qui explique la langue anglaise employée.

3.1 Introduction and main results

3.1.1 Introduction to the relativistic Vlasov-Poisson system

The relativistic Vlasov-Poisson system in dimension three reads:

$$\begin{cases} \partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2}} \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t=0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

where the gravitationnal Poisson field ϕ_f is defined for all $t \in \mathbb{R}^+$ by

$$\begin{cases} \Delta \phi_f(t, x) = \rho_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \\ \phi_f(t, x) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

This expression is equivalent to:

$$\phi_f(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * \rho. \quad (3.1.3)$$

This nonlinear transport system describes the evolution of a stellar system subject to its own gravity with some relativistic corrections.

Nowdays, the Cauchy problem of both classical and relativistic Vlasov-Poisson systems is not well understood: although the existence of local weak solutions has been proved , the question of its uniqueness remains unknown (see [15]). Moreover, for the relativistic case (3.1.1), in the most recent works about the Cauchy problem of smooth solutions, only

radial smooth initial data have given results (see [23] and [37]). In particular, Glassey and Schaeffer [23] have proved for radial smooth solutions that a blow-up in finite time T is characterised by the blow-up of the kinetic energy

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 \right) f(t, x, v) dx dv \rightarrow +\infty \text{ as } t \rightarrow T.$$

There holds for smooth enough solutions of system (3.1.1) some important conservation properties: first, the total Hamiltonian

$$\mathcal{H}(f(t)) = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 \right) f(t, x, v) dx dv - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_f(t, x)|^2 dx, \quad (3.1.4)$$

is preserved in time and second we have the conservation of all Casimir functions: for all $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ such that $\beta(0) = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^6} \beta(f(t, x, v)) dx dv = \int_{\mathbb{R}^6} \beta(f_0(x, v)) dx dv. \quad (3.1.5)$$

The property (3.1.5) is equivalent to the conservation of the distribution function:

$$\forall t \geq 0, \quad \mu_{f(t)} = \mu_{f_0}, \quad (3.1.6)$$

where the distribution function μ_f is defined by

$$\forall s \geq 0, \quad \mu_f(s) = \text{meas}\{(x, v) \in \mathbb{R}^6, f(x, v) > s\}. \quad (3.1.7)$$

Remark that in particular, the L^p norms of f are conserved.

In this paper, we will consider weak solutions to (3.1.1) in the natural energy space

$$\mathcal{E}_p = \left\{ f \geq 0 \text{ with } f \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^p(\mathbb{R}^6) \text{ and } \sqrt{1 + |v|^2} f \in L^1(\mathbb{R}^6) \right\}. \quad (3.1.8)$$

For all $f_0 \in \mathcal{E}_p$, the system (3.1.1) admits a local renormalized solution $f(t)$. This solution satisfies (3.1.5) and (3.1.6) but the conservation of Hamiltonian does not occur in general: it only remains

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_0). \quad (3.1.9)$$

Note that, from this nonincreasing property and from (3.1.5), the kinetic energy will be bounded if f_0 satisfies a certain subcritical condition

$$C_p \|f_0\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}} < 1. \quad (3.1.10)$$

Indeed, from Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, the potential energy satisfies

$$\text{for all } f \in \mathcal{E}_p, \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_f|^2 dx \leq C_p \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}} \left\| \sqrt{1 + |v|^2} f \right\|_{L^1} \quad (3.1.11)$$

where C_p is defined as the best corresponding constant and thus the kinetic energy can be controlled thanks to

$$\mathcal{H}(f) \geq \left(1 - C_p \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}} \right) \left\| \sqrt{1 + |v|^2} f \right\|_{L^1} - \|f\|_{L^1}. \quad (3.1.12)$$

Hence we have global existence for the system (3.1.1) as soon as f_0 satisfies the subcritical condition (3.1.10).

3.1.2 Main results and strategy of the proof

Our main result gives the nonlinear stability of a large class of stationary solutions for the relativistic Vlasov-Poisson equation. We adapt here a similar result for the classical Vlasov-Poisson equation [42].

Note (see [7]) that the radial steady states of the system (3.1.1) are the functions of the form

$$Q(x, v) = F(e, l),$$

where e and l are respectively the microscopic energy and the kinetic momentum given by

$$e(x, v) = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \text{ and } l = |x \wedge v|^2.$$

An important question which has been the subject of several works is the question of nonlinear stability of these steady states when F satisfies

$$\frac{\partial F}{\partial e} < 0.$$

For some of these stationary solutions, built as minimizers of suitable functional, the concentration-compactness Lemma ([45]- [46]) allows to prove their stability, see for example [40]. Here we get the nonlinear stability of all these stationary solutions in the energy space \mathcal{E}_p , defined by (3.1.8), with respect to its natural norm :

$$\|f\|_{\mathcal{E}_p} = \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p} + \|\sqrt{1 + |v|^2} f\|_{L^1}.$$

Theorem 3.1.1 (Stability of spherical models). *Let Q be a spherical, continuous, non-negative, non zero, compactly supported steady solution to (3.1.1). Assume that Q is a nonincreasing function of its microscopic energy, i.e. there exists a continuous function $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that for all $(x, v) \in \mathbb{R}^6$*

$$Q(x, v) = F\left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x)\right), \quad (3.1.13)$$

and there exists $e_0 < 0$ such that $F(e) = 0$ for $e \geq e_Q$, F is decreasing and \mathcal{C}^1 on $(-\infty, e_Q)$. Let $p > \frac{3}{2}$. Then Q is orbitally stable in the \mathcal{E}_p -norm by the flow (3.1.1) : for all $\varepsilon > 0$ there exists $\eta > 0$ such that the following holds true. Let $f_0 \in \mathcal{E}_p$ be such that

$$\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} \leq \eta \quad (3.1.14)$$

and let $f(t)$ be a corresponding renormalized solution to (3.1.1) on $[0, T)$. Then for all $t \in [0, T)$ there exists a continuous translation shift $z(t)$ such that

$$\|f(t, x, v) - Q(x - z(t), v)\|_{\mathcal{E}_p} \leq \varepsilon. \quad (3.1.15)$$

In the radial case, since a blow-up in finite time is equivalent to a blow-up of the kinetic energy, Theorem 3.1.1 provides global existence when the initial data is near the non necessary subcritical function Q . The existence of such Q away from all subcritical class of functions is an open problem.

Strategy of the proof: This proof uses arguments developped in [42] which treats the same stability problem for the classical gravitational Vlasov-Poisson system. But here two new main difficulties appear: the first one is that the studied class of functions in the energy space \mathcal{E}_p does not imply the boundness of the potentials and the second one is related to the breaking homogeneity character of the relativistic problem. Let us give the global strategy of the proof.

For $f \in \mathcal{E}_p$, we know that there exists a nonnegative function on \mathbb{R}_+ , f^* , which is the Schwarz symmetrization of f , such that

$$\forall s \geq 0, \quad \mu_f(s) = \mu_{f^*}(s).$$

We can similarly build a rearrangement with respect to the microscopic energy

$$e(x, v) = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x),$$

for a non zero potential ϕ . This rearrangement $f^{*\phi}$ is defined by

$$f^{*\phi} = f^* \circ a_\phi \text{ with } a_\phi(\lambda) = \text{meas}\{(x, v), e(x, v) < \lambda\}$$

and satisfies (as observed in [2])

$$\mu_f = \mu_{f^{*\phi}}, \quad \mathcal{H}(f^{*\phi}) \leq \mathcal{H}(f) \text{ and } Q = Q^{*\phi}.$$

Now by defining the fonctionnal J by

$$J(\phi) = \mathcal{H}(Q^{*\phi}) + \frac{1}{2} \|\nabla \phi_{Q^{*\phi}} - \nabla \phi\|_{L^2}^2,$$

we shall prove that

$$\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(Q) \geq J(\phi_f) - J(\phi_Q) + \int_0^{+\infty} a_{\phi_f}^{-1}(s)(f^*(s) - Q^*(s))ds. \quad (3.1.16)$$

Hence we can reduce our problem to the study of the fonctionnal J which only depends on the potential ϕ . Moreover, from the Polya-Szego inequality, we get

$$J(\phi^*) \leq J(\phi)$$

where ϕ^* is the Schwarz symmetrization of ϕ , and therefore the study of J can be restricted to radial modes. We then use the Burchard-Guo compactness result [16] to get the compactness of ϕ from that of ϕ^* .

Our proof is performed in two steps:

- (i) To prove the local coercivity of J on radial potentials ϕ near ϕ_Q .
- (ii) To prove Theorem 3.1.1 via a local compactness proposition thanks to (3.1.16). The second step will be deduced from (3.1.16) and equimeasurability arguments derived from the rigidity of the flow. The local coercivity stated in step 1 will follow from the Taylor expansion near ϕ_Q for radial potentials

$$J(\phi) - J(\phi_Q) = \frac{1}{2} D^2 J(\phi_Q)(\phi - \phi_Q, \phi - \phi_Q) + o(\|\nabla \phi - \nabla \phi_Q\|_{L^2}^2)$$

and from the strict coercivity of the quadratic form $D^2J(\phi_Q)$. To prove this coercivity, we follow the same lines as [42] where a Poincaré-like inequality was proved for the classical Vlasov-Poisson system. This inequality is a generalisation of Antonov's type coercivity estimate and is based on a Hörmander approach [33, 34]. The main new difficulties here, lie in the control of the jacobian a_ϕ which can not be bounded in general because of the non boundness of the potential and the homogeneity breaking.

3.2 Coercivity of the functional J

The aim of this section is to prove the following proposition 3.2.2 below. Our study is based on rearrangements with respect to the microscopic energy. To define these rearrangements, we introduce, for $q > 3$,

$$\Phi_q = \left\{ \phi \in L^q(\mathbb{R}^3) \text{ s.t. } \phi \leq 0, \ m(\phi) > 0, \ \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^3), \ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0 \right\}, \quad (3.2.1)$$

with

$$m(\phi) = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |\phi(x)|, \quad (3.2.2)$$

and the norm on Φ_q

$$\|\phi\|_{\Phi_q} = \|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.2.3)$$

The space Φ_q is a natural space for the potential of distribution functions in \mathcal{E}_p , as given by the following lemma.

Lemma 3.2.1. *Let $f \in \mathcal{E}_p$ non zero with $p > \frac{3}{2}$. Then the potential ϕ_f belongs to Φ_q for all $3 < q \leq \frac{3(4p-3)}{p} (< 12)$.*

Proof. From classical interpolation methods and from the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, we have for $f \in \mathcal{E}_p$ with $p > 1$

$$\rho_f \in L^r(\mathbb{R}^3), \ 1 \leq r \leq \frac{4p-3}{3p-2} \text{ and } \phi_f \in L^q(\mathbb{R}^3), \ \frac{3}{2} < q \leq \frac{3(4p-3)}{p}.$$

Moreover, for $p > \frac{3}{2}$ the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality implies that $\nabla \phi_f$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^3)$. We prove now that $m(\phi_f)$ defined by (3.2.2) is positive. Since f is non zero, the density ρ_f is non zero, too. Hence there exists $R > 0$ such that

$$M := \int_{|x| < R} \rho_f(x) dx > 0.$$

We have then

$$|\phi_f(x)| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_f(y)}{4\pi|x-y|} dy \geq \int_{|y| < R} \frac{\rho_f(y)}{4\pi|x-y|} dy \geq \int_{|y| < R} \frac{\rho_f(y)}{4\pi(|x|+R)} dy.$$

Finally,

$$(|x| + R) |\phi_f(x)| \geq M,$$

which concludes the proof of lemma 3.2.1. \square

Now for $\phi \in \Phi_q$ and $f \in \mathcal{E}_p$ with $p > \frac{3}{2}$, we define the jacobian a_ϕ by

$$\forall e < 0, \quad a_\phi(e) = \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6 : \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) < e \right\}, \quad (3.2.4)$$

and the rearrangement with respect to the microscopic energy by

$$f^{*\phi} = \begin{cases} f^* \left(a_\phi \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \right) \right) & \text{if } \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) < 0 \\ 0 & \text{if } \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \geq 0, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

where f^* is the Schwarz-symmetrization of f in \mathbb{R}^6 . In Appendix 3.4 we recall some properties about the Schwarz symmetrization and we give all the properties we need about the Jacobian and the rearrangement with respect to the microscopic energy. In particular, $f^{*\phi}$ is well defined in \mathcal{E}_p and the function Q defined in Theorem 3.1.1 satisfies $Q = Q^{*\phi_Q}$.

Using these definitions, we introduce the functional J on Φ_q defined by

$$J(\phi) = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \right) Q^{*\phi} dx dv + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2, \quad (3.2.6)$$

which is equivalent to

$$J(\phi) = \mathcal{H}(Q^{*\phi}) + \frac{1}{2} \|\nabla \phi_{Q^{*\phi}} - \nabla \phi\|_{L^2}^2. \quad (3.2.7)$$

We claim now the following Proposition which we prove in the next subsections.

Proposition 3.2.2 (Local coercivity of the functional J). *There exists a constant $\delta_0 > 0$ such that, for all $q > 3$, the following holds true. Let a sequence ϕ_n of Φ_q such that*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \leq \delta_0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} J(\phi_n) \leq J(\phi_Q). \quad (3.2.8)$$

Then there exists a sequence of translation shifts in space x_n such that

$$\|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q(\cdot - x_n)\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.2.9)$$

This coercivity of the functional J near ϕ_Q is the first step to prove the stability of Q stated in Theorem 3.1.1. To obtain it, on the one hand, we will look for a second order Taylor expansion of J around ϕ_Q and, on the second hand, we will control the second derivative of J at ϕ_Q thanks to a Poincaré-type inequality.

3.2.1 Second order Taylor expansion of J at ϕ_Q

In order to prove Proposition 3.2.2 we give first a Taylor expansion of the functional J near the potential ϕ_Q .

Lemma 3.2.3 (Taylor expansion of J). *Let $6 < q < 12$ and $\phi, \tilde{\phi} \in \Phi_q$. Then the function*

$$\lambda \mapsto J(\phi + \lambda(\tilde{\phi} - \phi))$$

is twice differentiable on $[0, 1]$.

Moreover, for ϕ in Φ_q radially symmetric, there holds the Taylor expansion near ϕ_Q :

$$J(\phi) - J(\phi_Q) = \frac{1}{2} D^2 J(\phi_Q)(\phi - \phi_Q, \phi - \phi_Q) + \varepsilon(\|\nabla \phi - \nabla \phi_Q\|_{L^2}), \quad (3.2.10)$$

where $\varepsilon(\delta) = o(\delta^2)$ as $\delta \rightarrow 0$.

Finally the second derivative of J at ϕ_Q in the direction h is given by:

$$D^2 J(\phi_Q)(h, h) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla h|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^6} |F'(e_{\phi_Q}(x, v))| (h(x) - \Pi h(x))^2 dx dv, \quad (3.2.11)$$

where $e_{\phi_Q}(x, v) = \sqrt{1 + |v|^2} - 1 - \phi_Q(x)$ and Πh is the projector defined by

$$\Pi h(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \left((1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y)) h(y) dy}{\int_{\mathbb{R}^3} \left((1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e_{\phi_Q}(x, v) - \phi_Q(y)) dy}. \quad (3.2.12)$$

Remark that the function Πh can be seen as the projection of h on the functions of the microscopic energy $e_{\phi_Q}(x, v)$. To prove the lemma 3.2.3 we will first prove that J is two times differentiable on Φ_q , then we will evaluate its derivatives on ϕ_Q and finally we will control the rest of the expansion for radially symmetric potentials.

Proof. Let J_0 be a fonctionnal on Φ_q , defined by

$$J_0(\phi) = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \right) Q^{*\phi} dx dv = \int_{\mathbb{R}^6} e_{\phi}(x, v) Q^{*\phi} dx dv. \quad (3.2.13)$$

Then J is given by

$$J(\phi) = J_0(\phi) + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2. \quad (3.2.14)$$

To differentiate J , we just have to differentiate J_0 . Let $\phi, \tilde{\phi} \in \Phi_q$ and $h = \tilde{\phi} - \phi$. We study then the function $\lambda \mapsto J_0(\phi + \lambda h)$ on $[0, 1]$.

First derivative of J_0 . From the change of variable (3.4.11), we get

$$J_0(\phi) = \int_{\inf \phi}^0 e Q^*(a_{\phi}(e)) a'_{\phi}(e) de = \int_{\inf \phi}^0 e (G \circ a_{\phi})'(e) de,$$

where G is the \mathcal{C}^1 bounded function, with bounded derivative, defined by

$$G(s) = \int_0^s Q^*(\sigma) d\sigma. \quad (3.2.15)$$

Moreover, from the property (3.4.8) in lemma 3.4.2, the jacobian $a_\phi(e)$ converges to 0 as $e \rightarrow \inf \phi$. Thus we have $[eG \circ a_\phi(e)]_{\inf \phi}^0 = 0$ and an integration by parts gives

$$J_0(\phi) = - \int_{-\infty}^0 G \circ a_\phi(e) de. \quad (3.2.16)$$

Step 1 : first derivative of J_0 .

To differentiate J_0 given by (3.2.16), we shall use the Lebesgue's derivation theorem. From formula (3.4.9) in the Appendix, we have for all $e < 0$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} G(a_{\phi+\lambda h}(e)) = Q^*(a_{\phi+\lambda h}(e)) \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi+\lambda h}(e) \quad (3.2.17)$$

with

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi+\lambda h}(e) = -4\pi \int_{\mathbb{R}^3} K(e - \phi(x) - \lambda h(x)) h(x) dx,$$

and

$$K(\eta) = \left((1 + \eta)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + \eta). \quad (3.2.18)$$

Note that the uniform inequality

$$a_{\phi+\lambda h}(e) \geq \frac{4\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\left(1 + e + \frac{\min\{m(\phi), m(\tilde{\phi})\}}{1 + |x|} \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} dx$$

and the compact support of Q^* imply that there exists $e_0 < 0$ such that

$$\forall e \geq e_0, \forall \lambda \in [0, 1], \quad Q^*(a_{\phi+\lambda h}(e)) = 0. \quad (3.2.19)$$

Moreover, we have for all $e < e_0$, for all $\lambda \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi+\lambda h}(e) \right| \leq 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} K(e_0 - \phi(x) - \tilde{\phi}(x)) |h(x)| dx,$$

and $Q^*(a_{\phi+\lambda h}(e)) \leq \|Q\|_\infty$. Finally we obtain, by noting $\phi_\lambda = \phi + \lambda h$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(\phi_\lambda) = 4\pi \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^3} Q^*(a_{\phi_\lambda}(e)) K(e - \phi(x) - \lambda h(x)) h(x) dx de. \quad (3.2.20)$$

Step 2 : second derivative of J_0 .

We keep the previous notations. An integration by parts with respect to e yields

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(\phi_\lambda) = -\frac{4\pi}{3} \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^3} Q^{*'}(a_{\phi_\lambda}(e)) a'_{\phi_\lambda}(e) \left((1 + e - \phi_\lambda(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} h(x) dx de.$$

We perform now the change of variable $s = a_{\phi_\lambda}(e)$, which gives

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(\phi_\lambda) = -\frac{4\pi}{3} \int_0^{L_0} \int_{\mathbb{R}^3} Q^{*'}(s) \left(\left(1 + a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi_\lambda(x) \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} h(x) dx ds, \quad (3.2.21)$$

where L_0 is the measure of the support of Q and thus satisfies $\text{Supp}(Q^*) = [0, L_0]$. Define

$$g(\lambda, x, s) := \left(\left(1 + a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi_\lambda(x) \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}}.$$

From the first step, for all $\lambda \in [0, 1]$ and for all $s \in [0, L_0]$, we have $a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) \leq e_0$ and thus the set

$$\{x \in \mathbb{R}^3, g(\lambda, x, s) \neq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^3, \phi_\lambda(x) \leq e_0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^3, \phi(x) + \tilde{\phi}(x) \leq e_0\}$$

is uniformly contained in the bounded set $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3, \phi(x) + \tilde{\phi}(x) \leq e_0\}$. Moreover, by recalling the notations $h = \phi - \tilde{\phi}$ and

$$K(\eta) = \left((1 + \eta)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + \eta), \quad (3.2.22)$$

we have for $(\lambda, x, s) \in [0, 1] \times \Omega \times [0, L_0]$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, x, s) = 3K \left(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi(x) - \lambda h(x) \right) \left(-h(x) + \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) \right), \quad (3.2.23)$$

where, from lemma (3.4.2) in Appendix,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) = \frac{\int_{\Omega} K \left(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi(x) - \lambda h(x) \right) h(x) dx}{\int_{\Omega} K \left(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi(x) - \lambda h(x) \right) dx}.$$

To differentiate (3.2.21) with respect to λ , we first prove at fixed $s \in (0, L_0)$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\Omega} g(\lambda, x, s) h(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda, x, s) h(x) dx. \quad (3.2.24)$$

Let fixed $s \in (0, L_0)$. We begin by bounding $\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi_\lambda}^{-1}(s)$. For all $x \in \mathbb{R}^3$

$$\phi(x) + \lambda h(x) \geq \phi(x) + \tilde{\phi}(x) \quad \text{and} \quad a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) \leq e_0, \quad (3.2.25)$$

which provides

$$0 \leq \int_{\Omega} K \left(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi(x) - \lambda h(x) \right) h(x) dx \leq \int_{\Omega} K \left(e_0 - \phi(x) - \tilde{\phi}(x) \right) h(x) dx. \quad (3.2.26)$$

Now denote

$$\Omega_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \phi_\lambda(x) < a_{\phi_\lambda}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right) \right\}.$$

Then the set Ω_λ is included in Ω and

$$\text{meas}(\Omega_\lambda) = a_{\phi_\lambda} \circ a_{\phi_\lambda}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right) = \frac{s}{2}.$$

Moreover, for all $x \in \Omega_\lambda$, we have

$$a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi_\lambda(x) \geq a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - a_{\phi_\lambda}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right),$$

which, combined with

$$\forall \eta > 0, K(\eta) = (\eta(2+\eta))_+^{\frac{1}{2}} (1+\eta) \geq \sqrt{2\eta},$$

implies

$$\int_{\Omega} K \left(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - \phi_\lambda(x) \right) dx \geq \frac{s}{\sqrt{2}} \left(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - a_{\phi_\lambda}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.27)$$

We claim that, at fixed $s > 0$, there exists a constant $C > 0$ such that for all $\lambda \in [0, 1]$

$$a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - a_{\phi_\lambda}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right) \geq C. \quad (3.2.28)$$

Indeed, assume that the property (3.2.28) does not hold, then there exist $\lambda \in [0, 1]$ and a sequence (λ_n) such that, as $n \rightarrow +\infty$,

$$\lambda_n \rightarrow \lambda \quad \text{and} \quad a_{\phi_{\lambda_n}}^{-1}(s) - a_{\phi_{\lambda_n}}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right) \rightarrow 0.$$

From lemma 3.4.2 in Appendix, we conclude that

$$a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - a_{\phi_\lambda}^{-1} \left(\frac{s}{2} \right) = 0,$$

which is not possible since $s > 0$ and $a_{\phi_\lambda}^{-1}$ is strictly increasing on \mathbb{R}_+^* . Finally from the inequalities (3.2.26) and (3.2.27), for $s \in (0, L_0)$ there exists a constant $C_s > 0$ such that for all $\lambda \in [0, 1]$,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) \leq C_s.$$

We can thus uniformly bound

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} g \right| \leq 3 \left(1 + e_0 - \phi(x) - \tilde{\phi}(x) \right)_+^2 \left(-\phi(x) - \tilde{\phi}(x) + C_s \right),$$

where we used (3.2.25) and the fact that $K(\eta) \leq (1+\eta)_+^2$. By noticing that the function $\phi + \tilde{\phi}$ belongs to $L_{loc}^3(\mathbb{R}^3)$ (since $q > 3$), Lebesgue derivation theorem provides (3.2.24).

Now aim to integrate with respect to $s \in (0, L_0)$. We define for all $s \in (0, L_0)$ and for all $\lambda \in [0, 1]$

$$I(\lambda, s) := \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\Omega} g(\lambda, x, s) h(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, x, s) h(x) dx,$$

which is continuous function of the variable λ . Remark that

$$I(\lambda, s) = 3 \int_{\Omega} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) \left(-h(x) + \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) \right) h(x) dx,$$

where, from Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) \frac{\partial a_{\phi_{\lambda}}^{-1}}{\partial \lambda} h(x) dx &= \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^3} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) h(x) dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}^3} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) dx} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) (h(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Thus, we have

$$|I(\lambda, s)| \leq 3 \int_{\mathbb{R}^3} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) (h(x))^2 dx.$$

Moreover, since Q^* is decreasing from $\|Q\|_{L^\infty}$ to 0, the function $Q^{*'} belongs to $L^1(0, L_0)$ and finally, from Lebesgue's derivation theorem, we get$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} J_0(\phi_{\lambda}) &= 4\pi \int_0^{L_0} \int_{\mathbb{R}^3} Q^{*'}(s) K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) (h(x))^2 dx ds \\ &\quad - 4\pi \int_0^{L_0} Q^{*'}(s) \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^3} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) h(x) dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}^3} K \left(a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s) - \phi_{\lambda}(x) \right) dx} ds. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Using the change of variable $e = a_{\phi_{\lambda}}^{-1}(s)$, we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} J_0(\phi_{\lambda}) &= 4\pi \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^3} Q^{*'}(a_{\phi_{\lambda}}(e)) a'_{\phi_{\lambda}}(e) K(e - \phi_{\lambda}(x)) (h(x))^2 dx de \\ &\quad - 4\pi \int_{-\infty}^0 Q^{*'}(a_{\phi_{\lambda}}(e)) a'_{\phi_{\lambda}}(e) \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^3} K(e - \phi_{\lambda}(x)) h(x) dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}^3} K(e - \phi_{\lambda}(x)) dx} de. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Step 3: derivatives of J at ϕ_Q :

Let $\phi \in \Phi_q$ and $h = \phi - \phi_Q$. Then, by (3.2.20),

$$DJ_0(\phi_Q)(h) = 4\pi \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^3} Q^*(a_{\phi_Q}(e)) K(e - \phi_{\lambda}(x)) h(x) dx de$$

Note that, from lemma 3.4.5, the function F defined by theorem 3.1.1 satisfies

$$Q^*(a_{\phi_Q}(e)) = F(e).$$

Now perform the change of variable $u = \left((1 + e - \phi_Q(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}}$ with respect to e . Then

$$\begin{aligned} DJ_0(\phi_Q)(h) &= 4\pi \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} F\left(\sqrt{1 + |v|^2} - 1 + \phi_Q(x)\right) u^2 h(x) dx du \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} Q(x, v) h(x) dx dv. \end{aligned}$$

Hence, from (3.2.14),

$$DJ(\phi_Q)(h) = DJ_0(\phi_Q)(h) + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_Q \cdot \nabla h dx = 0,$$

where we used the Poisson equation satisfied by ϕ_Q .

We now give the explicit expression of the second derivative of J_0 at ϕ_Q . Remark first that $F'(e) = Q^{*'}(a_{\phi_Q}(e))a'_{\phi_Q}(e)$ and thus from (3.2.31),

$$\begin{aligned} D^2 J_0(\phi_Q)(h, h) &= 4\pi \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^3} F'(e) K(e - \phi_\lambda(x)) (h(x))^2 dx de \\ &\quad - 4\pi \int_{-\infty}^0 F'(e) \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^3} K(e - \phi_\lambda(x)) h(x) dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}^3} K(e - \phi_\lambda(x)) dx} de. \end{aligned}$$

We apply the change of variable $u = \left((1 + e - \phi_Q(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}}$ with respect to e to get

$$D^2 J_0(\phi_Q)(h, h) = \int_{\mathbb{R}^6} F(e(x, v)) (h(x))^2 dx dv - \int_{\mathbb{R}^6} F'(e(x, v)) (h(x) - \Pi h(e(x, v))) ,$$

where $e(x, v) = \sqrt{1 + |v|^2} - 1 + \phi_Q(x)$ and Πh is the projector on the space of functions depending only on $e(x, v)$, defined by (3.2.12). Hence we have

$$D^2 J_0(\phi_Q)(h, h) = \int_{\mathbb{R}^6} F(e(x, v)) (h(x) - \Pi h(e(x, v)))^2 dx dv,$$

and the decomposition (3.2.14) provides

$$D^2 J(\phi_Q)(h, h) = D^2 J_0(\phi_Q)(h, h) + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla h|^2 dx, \quad (3.2.32)$$

which concludes the proof of (3.2.11).

Step 4: proof of the Taylor expansion (3.2.10):

Let $\phi \in \Phi_q$ radially symmetric and $h = \phi - \phi_Q$. We note for $\lambda \in [0, 1]$, $\phi_\lambda := \phi_Q + \lambda h$. Then, using $DJ(\phi_Q)(h) = 0$, we have

$$\begin{aligned}
J(\phi_Q + h) - J(\phi_Q) &= \frac{1}{2} D^2 J(\phi_Q)(h, h) \\
&+ \|\nabla h\|_{L^2}^2 \int_0^1 (1 - \lambda) (D^2 J_0(\phi_\lambda) - D^2 J_0(\phi_Q)) \left(\frac{h}{\|\nabla h\|_{L^2}}, \frac{h}{\|\nabla h\|_{L^2}} \right) d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

It is sufficient to prove that

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} \sup_{\|\nabla \hat{h}\|_{L^2}=1} \left| (D^2 J_0(\phi_\lambda) - D^2 J_0(\phi_Q)) (\hat{h}, \hat{h}) \right| \rightarrow 0 \tag{3.2.34}$$

as $\|\nabla \phi - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \rightarrow 0$ to obtain the Taylor expansion (3.2.10). Note that the functions \hat{h} in (3.2.34) are taken to be radially symmetric. In order to prove (3.2.34) we argue by contradiction. Let $\varepsilon > 0$, $\psi_n \in \Phi_q$, $\hat{h}_n \in \Phi_q$ and $\lambda_n \in [0, 1]$ such that

$$\|\nabla \psi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{n}, \quad \|\nabla \hat{h}_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \tag{3.2.35}$$

and

$$\left| (D^2 J_0(\phi_n) - D^2 J_0(\phi_Q)) (\hat{h}_n, \hat{h}_n) \right| > \varepsilon, \tag{3.2.36}$$

where $\phi_n = (1 - \lambda_n)\phi_Q + \lambda_n\psi_n$. The sequence ϕ_n satisfies

$$\|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{n}. \tag{3.2.37}$$

We recall from (3.2.30) that

$$D^2 J_0(\phi_n) (\hat{h}_n, \hat{h}_n) = 4\pi \int_0^{L_0} Q^{*'}(s) \gamma_n(s) ds, \tag{3.2.38}$$

where

$$\gamma_n(s) = \int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, s) (\hat{h}_n(x))^2 dx - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, s) \hat{h}_n(x) dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, s) dx}, \tag{3.2.39}$$

and

$$g_n(x, s) = \left(\left(1 + a_{\phi_n}^{-1}(s) - \phi_n(x) \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + a_{\phi_n}^{-1}(s) - \phi_n(x)).$$

Notice first that the convergence (3.2.37) implies the convergence of ϕ_n to ϕ_Q in $L^6(\mathbb{R}^3)$. Thus, from (3.4.8), we have

$$a_{\phi_n}^{-1}(s) \rightarrow a_{\phi_Q}^{-1}(s). \tag{3.2.40}$$

Moreover, we have

$$|\phi_n(r)| \leq \int_r^{+\infty} |\phi_n'(r)| dr \leq \|r\phi_n'(r)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \left(\int_r^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \right)^{\frac{1}{2}},$$

where we used the convergence $\phi_n(r)$ to 0 as $r \rightarrow +\infty$ from the definition of Φ_q . It gives

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad |\phi_n(r)| \leq \frac{\|\nabla \phi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{\sqrt{4\pi r}} \leq \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.2.41)$$

Thus the set of integration in x in the integral (3.2.39) can be restricted to a bounded domain Ω uniformly with respect to $s \in [0, L_0]$. Indeed, from the increase of $a_{\phi_n}^{-1}$, for all $s \in [0, L_0]$,

$$D_n(s) := \{x \in \mathbb{R}^3 : \phi_n(x) < a_{\phi_n}^{-1}(s)\} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \phi_n(x) < a_{\phi_n}^{-1}(L_0)\}, \quad (3.2.42)$$

and, since $\phi_n \in \Phi_q$ is nonpositive,

$$D_n(s) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq \frac{C^2}{e_0^2}\right\} =: \Omega \quad (3.2.43)$$

where $e_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_{\phi_n}^{-1}(L_0) < \infty$.

Now, from the local compactness of the Sobolev embedding $\dot{H}^1 \hookrightarrow L_{loc}^p$ for $1 \leq p < 6$, there exists $\hat{h} \in \dot{H}_{rad}^1$ such that, up to a subsequence,

$$\phi_n \rightarrow \phi_Q \text{ and } \hat{h}_n \rightarrow \hat{h} \text{ in } L^p(\Omega) \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

At fixed $s \in [0, L_0]$, these convergences combined with the convergence (3.2.40) provide, on the one hand, the convergence for all $i \in \{0, 1, 2\}$,

$$\hat{h}_n^i \rightarrow \hat{h}^i \text{ in } L^2(\Omega_s),$$

and, on the other hand, the convergence of

$$x \mapsto g_n(x, s)^2 = 2\eta + 5\eta^2 + 4\eta^3 + \eta^4 \text{ with } \eta = \left(a_{\phi_n}^{-1}(s) - \phi_n(x)\right)_+$$

in $L_x^1(\Omega)$ to $g(\cdot, s)^2$ where

$$g(x, s) = \left(\left(1 + a_{\phi_Q}^{-1}(s) - \phi_Q(x)\right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + a_{\phi_Q}^{-1}(s) - \phi_Q(x)).$$

Thus, for all $i \in \{0, 1, 2\}$, as $n \rightarrow +\infty$

$$g_n(x, s) \hat{h}_n^i \rightarrow g(x, s) \hat{h}^i \text{ in } L_x^1(\mathbb{R}^3).$$

The convergence of $\gamma_n(s)$, at fixed s , follows. Now, by Cauchy-Schwarz, we have

$$\left| \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, s) \hat{h}_n(x) dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, s) dx} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, s) (\hat{h}_n(x))^2 dx,$$

which provides

$$\begin{aligned} 0 \leq \gamma_n(s) &\leq \int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, s) (\hat{h}_n(x))^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} g_n(x, L_0) (\hat{h}_n(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Thus γ_n is uniformly bounded on $[0, L_0]$ and from standard dominated convergence theorem,

$$D^2 J_0(\phi_n) \left(\hat{h}_n, \hat{h}_n \right) \rightarrow D^2 J_0(\phi_Q) \left(\hat{h}, \hat{h} \right) \text{ as } n \rightarrow +\infty, \quad (3.2.44)$$

and similarly

$$D^2 J_0(\phi_Q) \left(\hat{h}_n, \hat{h}_n \right) \rightarrow D^2 J_0(\phi_Q) \left(\hat{h}, \hat{h} \right) \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.2.45)$$

These convergences contradict (3.2.36), which proves the Taylor expansion (3.2.10) and concludes the proof of Lemma 3.2.3. \square

3.2.2 Proof of Proposition 3.2.2.

We use now the Taylor expansion stated in lemma 3.2.3 to obtain the proposition 3.2.2. In a first step we prove the local coercivity of the fonctionnal J_0 near ϕ_Q for radially symmetric potentials by using a Hardy type control, obtained in a second step. In a third step, we finally pass from radially symmetric modes to general modes by using a compactness argument [16] which concludes the proof of the proposition 3.2.2.

Step 1: coercivity of the quadratic form $D^2 J(\phi_Q)$

In this step, our aim is to prove that there exists an universal constant $C_0 > 0$ such that

$$\forall h \in \dot{H}_{rad}^1 \quad D^2 J(\phi_Q)(h, h) \geq C_0 \|\nabla h\|_{L^2}^2. \quad (3.2.46)$$

where the space

$$\dot{H}_{rad}^1 = \left\{ h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3), \text{ radially symmetric, s.t. } \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ and } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0 \right\}.$$

is a Banach space. We consider the linear operator generated by the Hessian $D^2(\phi_Q)$:

$$\mathcal{L}h = -\Delta h - \int_{\mathbb{R}^3} |F'(e)|(h - \Pi h) dv.$$

Remark that the compactness of the quadratic form $D^2 J(\phi_Q)$ on \dot{H}_{rad}^1 is given by the previous proof of the Taylor expansion. From the Fredholm alternative, we have only to prove the strict positivity

$$\forall h \in \dot{H}_{rad}^1, h \neq 0, (\mathcal{L}h, h) > 0. \quad (3.2.47)$$

to obtain the coercivity (3.2.46). From the Taylor expansion (3.2.11), this inequality can be seen as a Poincaré inequality with an explicit constant, and we shall adapt the Hörmander's proof [33, 34] to obtain it.

Let us introduce the following operator T defined by

$$Tf(e, r) = \frac{\partial_r f}{r^2 ((1 + e - \phi_Q(r))^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (1 + e - \phi_Q(r))} = \frac{\partial_r f}{r^2 u \sqrt{1 + u^2}},$$

where

$$u(r, e) = ((1 + e - \phi_Q(r))^2 - 1)^{\frac{1}{2}}_+. \quad (3.2.48)$$

Recalling that $\phi_Q(r)$ is strictly increasing and that $\text{Supp}(F) = [0, e_Q)$, we shall denote the space

$$\mathcal{U} = \{(r, e), u > 0\} = \{(r, e), e \in (\phi_Q(0), 0), r \in (0, r(e))\} \text{ with } r(e) = \phi_Q^{-1}(e),$$

Then we define on $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cap (0, r(e_Q)) \times (\phi_Q(0), e_Q)$, for a given $h \in \dot{H}_{rad}^1$, the function

$$f(r, e) = \int_0^r (h(\tau) - \Pi h(e)) ((1 + e - \phi_Q(\tau))^2 - 1)^{\frac{1}{2}}_+ (1 + e - \phi_Q(\tau)) \tau^2 d\tau. \quad (3.2.49)$$

We can differentiate f and get, in particular,

$$Tf = h - \Pi h. \quad (3.2.50)$$

Now let $\varepsilon > 0$ and study the behavior of $f(e, r)$ for $r \rightarrow 0$ and $r \rightarrow r(e)$ when e belongs to $(\phi_Q(0) + \varepsilon, -\varepsilon)$. Notice first that, from (3.2.41), for all $\tau > 0$

$$\tau^{\frac{1}{2}} |h(\tau)| \leq \|\nabla h\|_{L^2}, \quad (3.2.51)$$

and

$$\forall e \in (\phi_Q(0) + \varepsilon, -\varepsilon), \quad |\Pi h(e)| \leq C_\varepsilon. \quad (3.2.52)$$

These inequalities combined with the continuity of ϕ_Q imply the existence of $C_\varepsilon > 0$ such that, for all $e \in (\phi_Q(0) + \varepsilon, -\varepsilon)$ and for all $r \in (0, r(e))$,

$$|f(e, r)| \leq C_\varepsilon r^{\frac{5}{2}}. \quad (3.2.53)$$

Moreover the function f satisfies

$$f(e, r(e)) = \int_0^{+\infty} (h(\tau) - \Pi h(e)) u(r, e) (1 + e - \phi_Q(\tau)) \tau^2 d\tau = 0, \quad (3.2.54)$$

where we used

$$\Pi h(e) = \frac{\int_0^{+\infty} u(\tau, e) (1 + e - \phi_Q(\tau)) h(\tau) \tau^2 d\tau}{\int_0^{+\infty} u(\tau, e) (1 + e - \phi_Q(\tau)) \tau^2 d\tau}.$$

Hence, using (3.2.51), (3.2.52) and the increase of ϕ_Q , we get for $e \in (\phi_Q(0) + \varepsilon, -\varepsilon)$ and $r \in (0, r(e))$

$$\begin{aligned} |f(r, e)| &= \left| \int_r^{r(e)} (h(\tau) - \Pi h(e)) ((1 + e - \phi_Q(\tau))^2 - 1)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e - \phi_Q(\tau)) \tau^2 d\tau \right| \\ &\leq C_\varepsilon ((1 + e - \phi_Q(r))^2 - 1)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e - \phi_Q(r)) \int_r^{r(e)} \tau^{\frac{3}{2}} d\tau, \end{aligned}$$

in which

$$((1 + e - \phi_Q(r))^2 - 1)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e - \phi_Q(r)) \leq (e - \phi_Q(r))_+^{\frac{1}{2}} (2 - \phi_Q(0))^{\frac{1}{2}} (1 - \phi_Q(0)),$$

and

$$\int_r^{r(e)} \tau^{\frac{3}{2}} d\tau \leq C(r(e) - r) \lesssim (e - \phi_Q(r)).$$

since $\phi'_Q(r) \geq \inf\{\phi'_Q(\tau), \tau \in [r(-\varepsilon), r(\phi_Q(0) + \varepsilon)]\} > 0$. Finally there exists $C_\varepsilon > 0$ such that for all $e \in (\phi_Q(0) + \varepsilon, -\varepsilon)$ and for all $r \in (0, r(e))$

$$|f(e, r)| \leq C_\varepsilon (e - \phi_Q(r))^{\frac{3}{2}}. \quad (3.2.55)$$

Now denote

$$I(h) = \int_{\mathbb{R}^6} |F'(e)| (h - \Pi h)^2 dx dv.$$

First, passing to the spherical coordinates and performing the change of variable $e = \sqrt{1 + |v|^2} - 1 + \phi_Q(r)$, we get from (3.2.50)

$$\begin{aligned} I(h) &= 16\pi^2 \int |F'(e)| (h - \Pi h)^2 r^2 u(e, r) \sqrt{1 + u(e, r)^2} dr de \\ &= 16\pi^2 \int_{\phi_Q(0)}^0 |F'(e)| de \int_0^{r(e)} (h(r) - \Pi h(e)) \partial_r f dr, \end{aligned}$$

where $u(r, e)$ is defined by (3.2.48). Now, from (3.2.55) and (3.2.53), we have

$$(h(r(e)) - \Pi h(e)) f(r(e), e) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (h(r) - \Pi h(e)) f(r, e) = 0,$$

from which an integration by parts gives

$$I(h) \leq -16\pi^2 \int_{\tilde{u}} |F'(e)| f \partial_r h de dr.$$

This inequality, combined with the identity

$$\rho_Q(r) = \frac{4\pi}{3} \int |F'(e)| u(e, r)^3 de,$$

leads to:

$$\begin{aligned} I(h) &\leq (4\pi)^{\frac{3}{2}} \|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\int_0^{r(e_Q)} \frac{dr}{r^2} \left(\int_{\phi_Q(r)}^{e_Q} |F'(e)| f de \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (4\pi)^{\frac{3}{2}} \|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\frac{3}{4\pi} \int_0^{r(e_Q)} \frac{\rho_Q(r)}{r^2} dr \int_{\phi_Q(r)}^{e_Q} |F'(e)| \frac{f^2}{u(e, r)^3} de \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

where we used Cauchy-Schwarz inequalities. Performing the change of variable $u = u(e, r)$ with respect to e , we finally obtain

$$I(h) \leq \|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(3 \int \rho_Q(r) |F'(e)| \frac{f^2}{r^4 u^4 \sqrt{1+u^2}} dx dv \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.56)$$

Now we claim the following Hardy type control:

$$I(h) \geq 3 \int \left(\rho_Q(r) + \frac{\phi'_Q(r)}{r(1+u^2)} \right) |F'(e)| \frac{f^2}{r^4 u^4 \sqrt{1+u^2}} dx dv. \quad (3.2.57)$$

Assume (3.2.57), then (3.2.56) yields

$$I(h) + 3 \int \frac{\phi'_Q(r)}{r(1+u^2)} |F'(e)| \frac{f^2}{r^4 u^4 \sqrt{1+u^2}} dx dv \leq \|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Thus, letting $\varepsilon \rightarrow 0$ yields $(\mathcal{L}h, h) \geq 0$. Moreover, if $(\mathcal{L}h, h) = 0$, then $f = 0$ on $\tilde{\mathcal{U}}$, which implies $h(r) = \Pi h(e)$ on $\tilde{\mathcal{U}}$, also $0 = (\mathcal{L}h, h) = \|\nabla h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$ and finally $h = 0$. This concludes the proof of (3.2.47).

Step 2: Hardy type control.

Let us prove now the Hardy type control (3.2.57). Let g be a given smooth function in $\tilde{\mathcal{U}}$ and q such that $f = qg$. After easy computations, we get

$$(Tf)^2 = g^2(Tq)^2 + T(q^2 g Tg) - \frac{T^2 g}{g} f^2 \geq T(q^2 g Tg) - \frac{T^2 g}{g} f^2. \quad (3.2.58)$$

We take $g(e, r) = r^3 u(e, r)^3$. Then, remarking that

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\phi'_Q(r) \frac{\sqrt{1+u^2}}{u},$$

we have

$$Tg = \frac{\partial_r g}{r^2 u \sqrt{1+u^2}} = 3 \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} - 3r \phi'_Q(r),$$

and therefore

$$T^2 g = \frac{-3}{ru \sqrt{1+u^2}} \left(\phi''_Q(r) + \frac{\phi'_Q(r)}{r} \left(2 + \frac{1}{1+u^2} \right) \right).$$

Since $\Delta\phi_Q = \rho_Q$, it implies

$$\frac{T^2g}{g} = -\frac{3}{r^4u^4\sqrt{1+u^2}} \left(\rho_Q(r) + \phi'_Q(r) \frac{1}{r(1+u^2)} \right). \quad (3.2.59)$$

Injecting this into (3.2.58) and integrating on $\tilde{\mathcal{U}}$ yield:

$$\begin{aligned} I(h) \geq & 3 \int \left(\rho_Q(r) + \frac{\phi'_Q(r)}{r(1+u^2)} \right) |F'(e)| \frac{f^2}{r^4u^4\sqrt{1+u^2}} dx dv, \\ & + \int |F'(e)| T \left(f^2 \frac{Tg}{g} \right) dx dv. \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

where we used $q^2gTg = f^2\frac{Tg}{g}$. Now

$$\int |F'(e)| T \left(f^2 \frac{Tg}{g} \right) dx dv = 16\pi^2 \int_{\phi_Q(0)}^{e_Q} |F'(e)| de \int_0^{r(e)} \partial_r \left(f^2 \frac{Tg}{g} \right) dr.$$

From (3.2.55) and (3.2.53), we can perform an integration by parts and we get

$$\int |F'(e)| T \left(f^2 \frac{Tg}{g} \right) dx dv = 0.$$

We obtain thus the Hardy type control (3.2.57) which concludes the proof of the strict positivity of the Hessian $D^2(\phi_Q)$ on radial modes (3.2.47) and therefore the coercivity (3.2.46).

Step 3: end of the proof: Let us first prove the proposition 3.2.2 for radially symmetric potential. Let ϕ_n a sequence of Φ_q , radially symmetric, such that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\nabla\phi_n - \nabla\phi_Q\|_{L^2} \leq \delta_1, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} J(\phi_n) \leq J(\phi_Q), \quad (3.2.61)$$

where δ_1 will be defined later. Then we use the Taylor expansion (3.2.10) and the coercivity (3.2.46), which holds only for radially symmetric potential:

$$J(\phi_n) - J(\phi_Q) \geq \frac{C_0}{2} \|\nabla\phi_n - \nabla\phi_Q\|_{L^2}^2 + \varepsilon(\|\nabla\phi_n - \nabla\phi_Q\|_{L^2}).$$

Now, since $\varepsilon(\delta) = o(\delta^2)$ as $\delta \rightarrow 0$, we can choose δ_1 such that

$$\forall \delta \in [0, \delta_1], \quad \varepsilon(\delta) \leq \frac{C_0}{4} \delta^2.$$

Thus

$$J(\phi_n) - J(\phi_Q) \geq \frac{C_0}{4} \|\nabla\phi_n - \nabla\phi_Q\|_{L^2}^2,$$

which finally provides, from (3.2.61),

$$\lim J(\phi_n) = J(\phi_Q) \text{ and } \|\nabla\phi_n - \nabla\phi_Q\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.2.62)$$

Let pass now at the general case. We consider a sequence ϕ_n of Φ_q . We define then $\phi_n^* = -(-\phi_n)^*$, the opposite of the Schwarz rearrangement of $(-\phi_n)$. We introduce, for all $n \in \mathbb{N}$, the potential $\phi_n^\#$ given by

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \phi_n^\#(x) = \phi_n^* \left(\frac{4\pi}{3} |x|^3 \right).$$

It is the Schwarz rearrangement of ϕ_n , defined as a function of \mathbb{R}^3 . Then we claim that we have

$$J(\phi_n^\#) - J(\phi_n) = \frac{1}{2} \|\nabla \phi_n^\#\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \phi_n\|_{L^2}^2 \leq 0, \quad (3.2.63)$$

and that there exists a constant $\delta_0 > 0$ such that

$$\|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \leq \delta_0 \text{ implies } \|\nabla \phi_n^\# - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \leq \delta_1. \quad (3.2.64)$$

Assume first that these claims are true and take the sequence ϕ_n such that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \leq \delta_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} J(\phi_n) \leq J(\phi_Q). \quad (3.2.65)$$

Then, from (3.2.63) and (3.2.64), the sequence $\phi_n^\#$ satisfies (3.2.61) and therefore satisfies (3.2.62). Moreover we obtain the equality

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(\phi_n^\#) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(\phi_n) = J(\phi_Q),$$

which implies from (3.2.63)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla \phi_n^\#\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla \phi_n\|_{L^2}. \quad (3.2.66)$$

From (3.2.62) and (3.2.66), we are in the equality case of the Polya-Szego inequality. Thanks to Theorem 2 in [16], we obtain the following compactness result : there exists a sequence of translation shifts in space, $x_n \in \mathbb{R}$, such that

$$\|\nabla \phi_n - \nabla \phi_Q(\cdot - x_n)\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Let us now prove the claims (3.2.63) and (3.2.64). Remark that, from Schwarz rearrangement classical properties, for all $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n^\#$ belongs to Φ_q and satisfies the Polya-Szego inequality

$$\|\nabla \phi_n^\#\|_{L^2} \leq \|\nabla \phi_n\|_{L^2}. \quad (3.2.67)$$

Moreover, for all C^1 function β such that $\beta(0) = 0$, one has

$$\int_{\mathbb{R}^3} \beta(\phi_n(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \beta(\phi_n^\#(x)) dx,$$

which for $e < 0$ and for $\beta(t) = ((1 + e - t)_+^2 - 1)_+^{\frac{3}{2}}$ implies $a_{\phi_n} = a_{\phi_n^*}$ given by the expression (3.4.2). Thus, from (3.2.16),

$$\begin{aligned} J(\phi_n) &= \frac{1}{2} \|\nabla \phi_n\|_{L^2}^2 - \int_{-\infty}^0 G(a_{\phi_n}(e)) de \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla \phi_n\|_{L^2}^2 - \int_{-\infty}^0 G(a_{\phi_n^\#}(e)) de, \end{aligned}$$

which provides directly the claim (3.2.63). Let us prove the claim (3.2.64) by a contradiction argument. We assume that there exists a sequence ψ_n in \dot{H}^1 such that

$$\|\nabla \psi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \leq \frac{1}{n} \text{ and } \|\nabla \psi_n^\# - \nabla \phi_Q\|_{L^2} > \delta_1. \quad (3.2.68)$$

The contractivity property of the rearrangement in L^p -norms and a Sobolev embedding give

$$\|\psi_n^\# - \phi_Q\|_{L^6} \leq \|\psi_n - \phi_Q\|_{L^6} \leq C \|\nabla \psi_n - \nabla \phi_Q\|_{L^2} \leq \frac{C}{n}.$$

Moreover by (3.2.67) and (3.2.68), we have

$$\|\nabla \psi_n^\#\|_{L^2} \leq \|\nabla \psi_n\|_{L^2} \leq \|\nabla \phi_Q\|_{L^2} + \frac{1}{n}. \quad (3.2.69)$$

Hence $\psi_n^\#$ is bounded in \dot{H}_r^1 and the sequence $\nabla \psi_n^\#$ converges to $\nabla \phi_Q$ in the L^2 weak topology. In fact, from Fatou lemma, the inequality (3.2.69) implies

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla \psi_n^\#\|_{L^2} = \|\nabla \phi_Q\|_{L^2}.$$

Thus the sequence $\nabla \psi_n^\#$ converges to $\nabla \phi_Q$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ which contradicts (3.2.68).

Notice that, for all $q \in (6, 12)$, the space Φ_q is included in \dot{H}^1 and thus δ_0 does not depend on q . The proof of Proposition 3.2.2 is now complete.

3.3 Nonlinear stability of Q

We are now ready to prove Theorem 3.1.1 in this section. The proof is based on the two following arguments : i) The local coercivity property of J stated in Proposition 3.2.2 which ensures the compactness of the potential field, and ii) The compactness of the whole distribution function in the energy space.

3.3.1 Local compactness of the distribution function

We will prove in this subsection that the Proposition 3.2.2 implies the following compactness result:

Proposition 3.3.1 (Local compactness of local minimizing sequences). *Let $p > \frac{3}{2}$. Let $\delta_0 > 0$ the constant defined in Proposition 3.2.2 and let f_n be a sequence of \mathcal{E}_p such that*

$$\|f_n^* - Q^*\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \|f_n^* - Q^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n) \leq \mathcal{H}(Q), \quad (3.3.1)$$

and

$$\|\nabla \phi_{f_n} - \nabla \phi_Q\|_{L^2} < \delta_0. \quad (3.3.2)$$

Then there exists a translation shift x_n such that

$$\|f_n - Q(\cdot - x_n)\|_{\mathcal{E}_p} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.3.3)$$

Proof of Proposition 3.3.1. Let (f_n) a sequence of \mathcal{E}_p satisfying (3.3.1) and (3.3.2).

Step 1: Compactness of the potential. We first remark that, from inequality (3.4.15), we have

$$\mathcal{H}(f_n) \geq \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_{f_n}(x) \right) f_n^{*\phi_{f_n}} dx dv + \frac{1}{2} \|\nabla \phi_{f_n}\|_{L^2}^2,$$

which implies, from the change of variable (3.4.11),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f_n) - J(\phi_{f_n}) &\geq \int_{\mathbb{R}^6}^{\infty} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_{f_n}(x) \right) \left(f_n^{*\phi_{f_n}} - Q^{*\phi_{f_n}} \right) dx dv \\ &\geq \int_0^{+\infty} a_{\phi_{f_n}}^{-1}(s) (f_n^*(s) - Q^*(s)) ds. \end{aligned}$$

Finally

$$\mathcal{H}(f_n) - H(Q) \geq J(\phi_{f_n}) - J(\phi_Q) + \int_0^{+\infty} a_{\phi_{f_n}}^{-1}(s) (f_n^*(s) - Q^*(s)) ds. \quad (3.3.4)$$

Now, since (f_n) satisfies (3.3.1) and (3.3.2), the sequence (f_n) is bounded in the energy space \mathcal{E}_p . From classical interpolation inequalities, for

$$q = \frac{3(4p-3)}{p} \in (6, 12),$$

the sequence ϕ_{f_n} belongs to Φ_q and is bounded in $L^q(\mathbb{R}^3)$. Thus, from (3.4.3) we have

$$\left| a_{\phi_{f_n}}^{-1}(s) \right| \leq C \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{q-3}}} + \frac{1}{s^{\frac{1}{q}}} \right). \quad (3.3.5)$$

Hence we obtain from Hölder inequalities

$$\left| \int_1^{+\infty} a_{\phi_{f_n}}^{-1}(s) (f_n^*(s) - Q^*(s)) ds \right| \leq 2C \|f_n^* - Q^*\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

and

$$\left| \int_0^1 a_{\phi_{f_n}}^{-1}(s)(f_n^*(s) - Q^*(s))ds \right| \leq \|a_{\phi_{f_n}}^{-1}\|_{L^{p'}(0,1)} \|f_n^* - Q^*\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

where $p' = \frac{p}{p-1} < 3$. Notice that $\frac{p'}{q-3} < 1$ which gives, from (3.3.5), the boundness :

$$\|a_{\phi_{f_n}}^{-1}\|_{L^{p'}(0,1)}^{p'} \leq 2C \int_0^1 \frac{1}{s^{\frac{p'}{q-1}}} ds = 2C \left(1 - \frac{p'}{q-1}\right).$$

We have then the convergence

$$\int_0^{+\infty} a_{\phi_{f_n}}^{-1}(s)(f_n^*(s) - Q^*(s))ds \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow +\infty$ and, injecting this in (3.3.4), we conclude from (3.3.1) that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(\phi_{f_n}) \leq J(\phi_Q). \quad (3.3.6)$$

Together with the condition (3.3.2), this allows us to apply Proposition (3.2.2) and we conclude that there exists a sequence of translation shifts in space x_n such that

$$\|\nabla \phi_{f_n} - \nabla \phi_Q(\cdot - x_n)\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.3.7)$$

Step 2: Convergence of $f_n(\cdot + x_n, \cdot)$ in \mathcal{E}_p . To obtain the convergence in the energy space \mathcal{E}_p , the method that we chose is very similar with the method developed in [42]. We renote $f_n := f_n(\cdot + x_n, \cdot)$. We remark first that since $Q = Q^{*\phi_Q}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q \right) \left(f_n^{*\phi_Q} - Q \right) dx dv \right| &= \left| \int_0^\infty a_{\phi_Q}^{-1}(s) (f_n^*(s) - Q^*(s)) ds \right| \\ &\leq \|\phi_Q\|_{L^\infty} \|f_n^* - Q^*\|_{L^1}, \end{aligned}$$

and thus

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) \left(f_n^{*\phi_Q} - Q \right) dx dv \rightarrow 0 \quad (3.3.8)$$

Now, from the inequality (3.4.15), it implies that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) (f_n - Q) dx dv \geq 0.$$

Hence, since

$$\mathcal{H}(f_n) = \mathcal{H}(Q) + \frac{1}{2} \|\nabla \phi_{f_n} - \nabla \phi_Q\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) (f_n - Q) dx dv,$$

in which

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(f_n) \leq \mathcal{H}(Q) \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla \phi_{f_n} - \nabla \phi_Q\|_{L^2} = 0,$$

we obtain, as $n \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) (f_n - Q) dx dv \rightarrow 0. \quad (3.3.9)$$

The two convergences (3.3.8) and (3.3.9) yield

$$T_n := \int_{\mathbb{R}^6} e_Q(x, v) \left(f_n - f_n^{*\phi_Q} \right) dx dv \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty, \quad (3.3.10)$$

where $e_Q(x, v) := \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x)$. As in the proof of (3.4.15), we write T_n in the following equivalent form

$$T_n = \int_{t=0}^{+\infty} dt \left(\int_{S_1^n(t)} e_Q(x, v) dx dv - \int_{S_2^n(t)} e_Q(x, v) dx dv \right),$$

where

$$\begin{aligned} S_1^n(t) &= \{(x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad f_n^{*\phi_Q}(x, v) \leq t < f_n(x, v)\}, \\ S_2^n(t) &= \{(x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad f_n(x, v) \leq t < f_n^{*\phi_Q}(x, v)\}. \end{aligned}$$

From (3.4.25), we have

$$\forall (x, v) \in S_1^n(t), \quad e_Q(x, v) \geq (f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t).$$

Thus

$$T_n \geq \int_{t=0}^{+\infty} dt \left(\int_{S_1^n(t)} (f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) dx dv - \int_{S_2^n(t)} e_Q(x, v) dx dv \right),$$

and since $\text{meas}(S_1^n(t)) = \text{meas}(S_2^n(t))$ for all $t \in \mathbb{R}_+$,

$$T_n \geq \int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{S_2^n(t)} [(f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) - e_Q(x, v)] dx dv.$$

Remark from (3.4.24), that the right term is nonnegative and thus, from (3.3.10), we get as $n \rightarrow +\infty$

$$A_n := \int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{S_2^n(t)} [(f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) - e_Q(x, v)] dx dv \rightarrow 0 \quad (3.3.11)$$

We now claim that this implies

$$B_n := \int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{\Omega_2^n(t)} [(Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) - e_Q(x, v)] dx dv \rightarrow 0 \quad (3.3.12)$$

as $n \rightarrow +\infty$ where

$$\Omega_2^n(t) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^6, \quad f_n(x, v) \leq t < Q(x, v)\}.$$

To prove it, we decompose

$$S_2^n = (S_2^n \setminus \Omega_2^n) \cup (S_2^n \cap \Omega_2^n) \quad \text{and} \quad \Omega_2^n = (\Omega_2^n \setminus S_2^n) \cup (S_2^n \cap \Omega_2^n).$$

Thus

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{\Omega_2^n(t) \setminus S_2^n(t)} [e_Q(x, v) - (Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t)] dx dv \\ &\quad + \int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{S_2^n(t) \setminus \Omega_2^n(t)} [(f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) - e_Q(x, v)] dx dv \\ &\quad + \int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{S_2^n(t) \cap \Omega_2^n(t)} [(f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) - (Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t)] dx dv \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Now let us examine each term as $n \rightarrow +\infty$. We first observe that for $g, h \in L^6(\mathbb{R}^6)$ we have

$$\int_0^{+\infty} \text{meas}(\{g < t \leq h\}) dt = \int_{\mathbb{R}^6} (h - g)_+ dx dv, \quad (3.3.14)$$

Thus we obtain

$$\int_0^{+\infty} \text{meas}(S_2^n(t) \setminus \Omega_2^n(t)) dt \leq \int_0^{+\infty} \text{meas}(\{Q < t \leq f_n^{*\phi_Q}\}) dt = \int_{\mathbb{R}^6} (f_n^{*\phi_Q} - Q)_+ dx dv,$$

which gives, from (3.3.1),

$$\int_0^{+\infty} \text{meas}(S_2^n(t) \setminus \Omega_2^n(t)) dt \leq \|f_n^{*\phi_Q} - Q\|_{L^1} = \|f_n^* - Q^*\|_{L^1} \rightarrow 0,$$

and similarly for $\text{meas}(\Omega_2^n(t) \setminus S_2^n(t))$. Using in addition the estimate

$$|e_Q(x, v)| \leq |\phi_Q(0)|, \quad |(f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t)| \leq |\phi_Q(0)|, \quad |(Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t)| \leq |\phi_Q(0)|,$$

we deduce that the first two terms of (3.3.13) converge to 0 as $n \rightarrow +\infty$. We now deal with the third term. Combining the strong L^1 convergence in (3.3.1), the monotonicity of f_n^* and the continuity of Q^* , we get

$$\forall e \in (\phi_Q(0), 0), \quad f_n^* \circ a_{\phi_Q}(e) \rightarrow Q^* \circ a_{\phi_Q}(e) \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Thus for $e \in (\phi_Q(0), 0)$ such that $Q^* \circ a_{\phi_Q}(e) > t$ we have for n large enough

$$f_n^* \circ a_{\phi_Q}(e) > t,$$

which from the definition of the pseudoinverse $(f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}$ provides

$$e \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t).$$

From the definition of $(Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}$, we conclude that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (f_n^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) \geq (Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t).$$

We just inject it into the third term of (3.3.13) to obtain

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (A_n - B_n) \geq 0.$$

Moreover, from (3.3.11), from the definition of Ω_2^n and from (3.4.24), we have

$$A_n \rightarrow 0 \text{ and } B_n \geq 0.$$

We conclude that the convergence (3.3.12) holds true:

$$\int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{\{f_n \leq t < Q\}} [(Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) - e_Q(x, v)] dx dv \rightarrow 0. \quad (3.3.15)$$

Since $e \mapsto F(e)$ is continuous and strictly decreasing with respect to $e = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x)$ for $(x, v) \in \{Q(x, v) > 0\}$, we have

$$t < Q(x, v) \text{ implies } (Q^* \circ a_{\phi_Q})^{-1}(t) - e_Q(x, v) > 0.$$

Thus, up to a subsequence,

$$\text{for a.e. } (t, x, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{1}_{\{f_n \leq t < Q\}} \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Since $\mathbf{1}_{\{f_n \leq t < Q\}} \leq \mathbf{1}_{\{t < Q\}}$ and

$$\int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^6} \mathbf{1}_{\{t < Q\}} dx dv dt = \|Q\|_{L^1} < +\infty,$$

we may apply the dominated convergence theorem to get:

$$\int_{t=0}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^6} \mathbf{1}_{\{f_n \leq t < Q\}} dx dv dt \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty,$$

which, from (3.3.14) is equivalent to

$$\int_{\mathbb{R}^6} (Q - f_n)_+ dx dv \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.3.16)$$

Now we write

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^6} (f_n - Q)_+ dx dv &\leq \int_{\mathbb{R}^6} (f_n - f_n^{*\phi_Q})_+ dx dv + \int_{\mathbb{R}^6} (f_n^{*\phi_Q} - Q)_+ dx dv \\ &\leq \int_0^{+\infty} \text{meas}(\{f_n^{*\phi_Q} \leq t < f_n\}) dt + \|f_n^{*\phi_Q} - Q\|_{L^1}, \end{aligned}$$

where, from the equimeasurability of f_n and $f_n^{*\phi_Q}$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \text{meas}(\{f_n^{*\phi_Q} \leq t < f_n\}) dt &= \int_0^{+\infty} \text{meas}(\{f_n \leq t < f_n^{*\phi_Q}\}) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} (f_n^{*\phi_Q} - f_n)_+ dx dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^6} (Q - f_n)_+ dx dv + \int_{\mathbb{R}^6} (f_n^{*\phi_Q} - Q)_+ dx dv. \end{aligned}$$

We finally get

$$\int_{\mathbb{R}^6} (f_n - Q)_+ dx dv \leq \int_{\mathbb{R}^6} (Q - f_n)_+ dx dv + 2 \|f_n^{*\phi_Q} - Q\|_{L^1}.$$

Now, since $\|f_n^{*\phi_Q} - Q\|_{L^1} = \|f_n^* - Q^*\|_{L^1} \rightarrow 0$, we obtain from (3.3.16) the L^1 convergence

$$\|f_n - Q\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.3.17)$$

Now, from the convergence of $\nabla \phi_{f_n}$ to $\nabla \phi_Q$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ and from (3.3.1) we have

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 \right) (f_n - Q) dx dv \leq 0. \quad (3.3.18)$$

But f_n converges almost everywhere in \mathbb{R}^6 to Q , thus we have an equality in (3.3.18) and thus the convergence is strong:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} \right) |f_n - Q| dx dv \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (3.3.19)$$

Similarly, we remark that

$$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^6)} = \|f_n^*\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \|Q^*\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} = \|Q\|_{L^p(\mathbb{R}^6)},$$

when $n \rightarrow +\infty$ and we obtain the strong L^p convergence and the proof of Proposition 3.3.1 is completed. \square

3.3.2 Stability from the local compactness

Let $p > \frac{3}{2}$. From the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality and Hölder inequalities, we have from the classical interpolation's inequality:

$$\|\nabla \phi_f - \nabla \phi_g\|_{L^2} \leq K \|\rho_f - \rho_g\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq K \|f - g\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{6(p-1)}} \|f - g\|_{L^p}^{\frac{p}{6(p-1)}} \|v|(f - g)\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.20)$$

Thus for all $f \in \mathcal{E}_p$

$$\|f - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon \text{ implies } \|\nabla \phi_f - \nabla \phi_Q\|_{L^2} < K\varepsilon. \quad (3.3.21)$$

Let fixed $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$K\varepsilon_0 < \frac{\delta_0}{2},$$

where K is the constant in (3.3.21) and δ_0 is defined by Proposition 3.3.1. Let $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Then an equivalent reformulation of Proposition 3.3.1 is the following: there exists

$$0 < \eta < \varepsilon_0$$

such that the following sentence holds true: if $f \in \mathcal{E}_p$ is such that

$$\|f^* - Q^*\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \eta, \|f^* - Q^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \eta, \mathcal{H}(f) \leq \mathcal{H}(Q) + \eta, \quad (3.3.22)$$

and

$$\|\nabla \phi_f - \nabla \phi_Q\|_{L^2} < \delta_0, \quad (3.3.23)$$

then there exists a translation shift $y \in \mathbb{R}^3$ such that

$$\|f - Q(\cdot - y)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon. \quad (3.3.24)$$

Remark that the assumption (3.3.23) can be replaced by

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^3} \|\nabla \phi_f(\cdot + z) - \nabla \phi_Q\|_{L^2} < \delta_0. \quad (3.3.25)$$

Indeed, on the first hand, if the condition (3.3.23) is satisfied, the condition (3.3.25) is satisfied too. In the other hand, if a function f satisfies (3.3.22) and (3.3.25), then there exists $z \in \mathbb{R}^3$ such that $\tilde{f} = f(\cdot + z, \cdot)$ satisfies (3.3.23). But \tilde{f} satisfies (3.3.22) too. Thus we have (3.3.24) for \tilde{f} and also for f .

Now we prove theorem 3.1.1. Let $f_0 \in \mathcal{E}_p$ such that

$$\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \eta. \quad (3.3.26)$$

Let $f(t) \in \mathcal{F}([0, T], \mathcal{E}_p)$ a corresponding renormalized solution to (3.1.1) as stated in [19, 20]. We want to show that $f(t)$ satisfies (3.3.24) for all $t \in [0, T]$.

Let us first prove that $f(t)$ satisfies (3.3.22) for all t . From (3.3.26), we have

$$\|f_0 - Q\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq \eta, \|f_0 - Q\|_{L^p(\mathbb{R}^6)} \leq \eta, \mathcal{H}(f_0) \leq \mathcal{H}(Q) + \eta,$$

and from the property of contraction of symmetric rearrangement:

$$\|f^* - Q^*\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq \|f - Q\|_{L^p(\mathbb{R}^6)},$$

we deduce that f_0 satisfies (3.3.22). By conservation of the flow, we have

$$\forall t \in (0, T), \quad f(t)^* = f_0^* \text{ and } \mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_0).$$

We conclude that (3.3.22) is satisfied for all $t \in (0, T)$.

Let us now prove that (3.3.25) is satisfied for all $t \in (0, T)$. At $t = 0$, since $\eta < \varepsilon_0$, from (3.3.21), we have

$$\|\nabla \phi_{f_0} - \nabla \phi_Q\|_{L^2} < \frac{\delta_0}{2}.$$

Moreover, from the regularity of the flow, the potential satisfies

$$t \mapsto \nabla \phi_{f(t)} \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)),$$

which provides the continuity on $[0, T)$ of the function

$$\beta : t \mapsto \inf_{z \in \mathbb{R}^3} \|\nabla \phi_{f(t)}(\cdot + z) - \nabla \phi_Q\|_{L^2},$$

Indeed for all $z \in \mathbb{R}^3$, we have the uniform boundness

$$\begin{aligned} & \left| \left\| \nabla \phi_{f(t)}(\cdot + z) - \nabla \phi_Q \right\|_{L^2} - \left\| \nabla \phi_{f(t_0)}(\cdot + z) - \nabla \phi_Q \right\|_{L^2} \right| \\ & \leq \left\| \nabla \phi_{f(t)}(\cdot + z) - \nabla \phi_{f(t_0)}(\cdot + z) \right\|_{L^2} = \left\| \nabla \phi_{f(t)} - \nabla \phi_{f(t_0)} \right\|_{L^2}, \end{aligned}$$

which provides the continuity of β . Now, by a contradiction argument, assume that there exists $t_1 > 0$ such that $\beta(t_1) > \delta_0$. Since $\beta(0) < \delta_0/2$ there exists $t_2 > 0$ such that $\beta(t_2) = 3\delta_0/4$. In particular, $f(t_2)$ satisfies (3.3.22) and (3.3.25) and thus there exists $z(t_2) \in \mathbb{R}^3$ such that

$$\|f(t_2) - Q(\cdot - x(t_2))\|_{\varepsilon_p} < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Injecting it into (3.3.21), we conclude that $\beta(t_2) < \delta_0/2$, which contradicts our assumption. The proof of Theorem (3.1.1) is complete.

3.4 Appendix

We give some useful properties of the jacobian a_ϕ given by (3.2.4) and the rearrangement with respect to the microscopic energy defined in (3.2.5). We recall that the space Φ_q is defined for $q > 3$ by (3.2.1).

3.4.1 Jacobian of the microscopic energy

We first gather in the following two lemmas some important properties of the jacobian a_ϕ .

Lemma 3.4.1 (Properties of the Jacobian a_ϕ). *Let $\phi \in \Phi_q$ with $q > 3$. We recall that the Jacobian a_ϕ is defined as*

$$\forall e < 0, \quad a_\phi(e) = \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6 : \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) < e \right\}. \quad (3.4.1)$$

Then:

(i) *We have the explicit formula:*

$$\forall e < 0, \quad a_\phi(e) = \frac{4\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left((1 + e - \phi(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} dx. \quad (3.4.2)$$

Notice that $((1 + e - \phi(x))_+^2 - 1)_+ = ((1 + e - \phi(x))^2 - 1) \mathbf{1}_{e - \phi(x) > 0}(x)$.

(ii) a_ϕ is \mathcal{C}^1 on $(-\infty, 0)$ and is a strictly increasing \mathcal{C}^1 diffeomorphism from $(\inf \phi, 0)$ onto \mathbb{R}_+^* , which defines a_ϕ^{-1} . Moreover there exist two positive constants C and \tilde{C} such that for all $e < 0$ and for all $s > 0$

$$a_\phi(e) \leq \frac{C}{|e|^{q-3}} \left(1 + \frac{1}{|e|^3} \right) \|\phi\|_{L^q}^q \quad \text{and} \quad a_\phi^{-1}(s) \geq -\tilde{C} \left(\frac{\|\phi\|_{L^q}^{\frac{q}{q-3}}}{s^{\frac{1}{q-3}}} + \frac{\|\phi\|_{L^q}}{s^{\frac{1}{q}}} \right). \quad (3.4.3)$$

The quantity $\inf \phi$ is the essential infimum of the measurable function ϕ .

Let prove these properties.

Proof of Lemma 3.4.1. To prove (i), remark that for $e < 0$

$$\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) < e \Leftrightarrow \left\{ \phi(x) < e \text{ and } |v| < \left((1 + e - \phi(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Since $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi = 0$, the set $\{x \in \mathbb{R}^3 : \phi(x) < e\}$ is bounded and since ϕ belongs to $L^q(\mathbb{R}^3)$ with $q > 3$, we have $\phi \in L_{loc}^3(\mathbb{R}^3)$ which implies

$$x \mapsto \left((1 + e - \phi(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} \text{ belongs to } L^3(\mathbb{R}^3).$$

Thus for all $e < 0$, $a_\phi(e)$ is finite and after passing to the spherical coordinates in velocity we obtain the formula (3.4.2).

Proof of (ii). We define $g(e, x) := \left((1 + e - \phi(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}}$. Then, for $e < e_0 < 0$,

$$0 \leq \frac{\partial g}{\partial e}(e, x) \leq 3 \left((1 + e_0 - \phi(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + e_0 - \phi(x)),$$

which, as function of the variable x , belongs to $L^1(\mathbb{R}^3)$. Indeed its support is included in the bounded set $\{x \in \mathbb{R}^3 : \phi(x) < e_0\}$ and $\phi \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$. Hence we may apply the dominated convergence theorem and get that a_ϕ is a \mathcal{C}^1 function on \mathbb{R}_-^* , nul on $(-\infty, \inf \phi]$ (if $\inf \phi$ is finite) and strictly increasing on $(\inf \phi, 0)$.

We now look for the limit of $a_\phi(e)$ when $e \rightarrow 0$. Since $\phi \in \Phi_q$,

$$a_\phi(e) \geq \frac{4\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\left(1 + e + \frac{m(\phi)}{1 + |x|} \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} dx \rightarrow +\infty \text{ as } e \rightarrow 0.$$

To conclude the proof of (ii), let us study the behavior of $a_\phi(e)$ as $e \rightarrow -\infty$ in the case $\inf \phi = -\infty$. We observe, from Hölder inequality, that

$$a_\phi(e) \leq (\text{meas}\{x \in \mathbb{R}^3 : \phi(x) < e\})^{\frac{q-3}{q}} \left(\int_{\phi(x) < e} \left((1 + e - \phi(x))^2 - 1 \right)^{\frac{q}{2}} dx \right)^{\frac{3}{q}}, \quad (3.4.4)$$

where both terms can be controled. The first term satisfies

$$\text{meas}\{x \in \mathbb{R}^3 : \phi(x) < e\} \leq \int_{\phi(x) < e} \left(\frac{\phi(x)}{e} \right)^q dx \leq \frac{\|\phi\|_{L^q}^q}{|e|^q}, \quad (3.4.5)$$

and the second term

$$\int_{\phi(x) < e} \left((1 + e - \phi(x))^2 - 1 \right)^{\frac{q}{2}} dx \leq \int_{\phi(x) < e} C (1 + |\phi(x)|^q) dx \leq C \left(\frac{\|\phi\|_{L^q}^q}{|e|^q} + \|\phi\|_{L^q}^q \right),$$

where we use the inequality (3.4.5). Now, injecting these both inequalities in (3.4.4), we conclude that there exists a constant $C > 0$ such that for all $e < 0$

$$a_\phi(e) \leq \frac{C}{|e|^{q-3}} \left(1 + \frac{1}{|e|^3} \right) \|\phi\|_{L^q}^q. \quad (3.4.6)$$

Finally the inverse a_ϕ^{-1} satisfies for all $s > 0$

$$a_\phi^{-1}(s) \geq -\tilde{C} \left(\frac{\|\phi\|_{L^q}^{\frac{q}{q-3}}}{s^{\frac{1}{q-3}}} + \frac{\|\phi\|_{L^q}}{s^{\frac{1}{q}}} \right), \quad (3.4.7)$$

and the properties (ii) are proved. \square

The first lemma 3.4.1 gives first properties about the jacobian a_ϕ at fixed $\phi \in \Phi_q$. The regularity of the jacobian with respect to the potential ϕ is studied in the following lemma.

Lemma 3.4.2 (Regularity of the Jacobian a_ϕ with respect to ϕ). *Let $q > 3$. Then*

(iii) *Let (ϕ_n) , (e_n) and (s_n) sequences of respectively Φ_q , \mathbb{R}_-^* and \mathbb{R}_+^* . Assume that there exist $\phi \in \Phi_q$, $e \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$ and $s \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ such that*

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ in } L^q(\mathbb{R}^3), \quad e_n \rightarrow e \text{ and } s_n \rightarrow s.$$

Then by denoting $a_\phi(-\infty) = 0$, $a_\phi(0) = +\infty$ and $a_\phi^{-1}(+\infty) = 0$, we have

$$a_{\phi_n}(e_n) \rightarrow a_\phi(e) \text{ and } a_{\phi_n}^{-1}(s_n) \rightarrow a_\phi^{-1}(s). \quad (3.4.8)$$

(iv) *Let $\phi, \tilde{\phi} \in \Phi_q$ and let $h = \phi - \tilde{\phi}$. Then the function $(\lambda, e) \mapsto a_{\phi+\lambda h}(e)$ is a \mathcal{C}^1 function on $[0, 1] \times \mathbb{R}_-^*$ and we have*

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi+\lambda h}(e) = -4\pi \int_{\mathbb{R}^3} K(e - \phi(x) - \lambda h(x)) h(x) dx. \quad (3.4.9)$$

where the function K , defined by

$$K(\eta) = \left((1 + \eta)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + \eta),$$

is non decreasing and has its support in \mathbb{R}_+^* .

(v) *With the same notation as (iv). Let $s \in \mathbb{R}_+^*$. Then the function $\lambda \mapsto a_{\phi+\lambda h}^{-1}(s)$ is a \mathcal{C}^1 function on $[0, 1]$ and we have*

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi+\lambda h}^{-1}(s) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} K(a_{\phi+\lambda h}^{-1}(s) - \phi(x) - \lambda h(x)) h(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^3} K(a_{\phi+\lambda h}^{-1}(s) - \phi(x) - \lambda h(x)) dx}. \quad (3.4.10)$$

Proof. Proof of (iii): From the control of the jacobian (3.4.3), we have directly for $e = -\infty$,

$$a_{\phi_n}(e_n) \rightarrow 0 = a_{\phi}(-\infty) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

Let us now treat the case $e < 0$ such that $e \neq -\infty$. Up to a subsequence, we have the convergence

$$\left((1 + e_n + \phi_n(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} \rightarrow \left((1 + e + \phi(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}}$$

almost everywhere in \mathbb{R}^3 . To obtain the convergence in $L^1(\mathbb{R}^3)$, from a generalized dominated convergence theorem, we have just to prove the following L^1 -convergence,

$$g_n := \left((1 + e_0 + \phi_n)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} \rightarrow \left((1 + e_0 + \phi)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} =: g$$

where $e_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} e_n < 0$. In order to do it, we define the set

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \phi(x) < \frac{e_0}{2} \right\}.$$

Since Ω is included in a compact set, the convergence of g_n to g in $L^1(\Omega)$ comes from the convergence of ϕ_n to ϕ in $L_{loc}^3(\mathbb{R}^3)$. Out of Ω we have $g(x) = 0$ and, from a similar Hölder inequality as (3.4.4), we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} g_n(x) dx &\leq C \left(\frac{\|\phi_n\|_{L^q}^q}{|e|^q} + \|\phi_n\|_{L^q}^q \right)^{\frac{3}{q}} \left(\text{meas}\{x \in \mathbb{R}^3 : \phi_n(x) < e_0, \phi(x) \geq \frac{e_0}{2}\} \right)^{\frac{q-3}{q}} \\ &\leq \bar{C} \left(\text{meas}\{x \in \mathbb{R}^3 : |\phi_n(x) - \phi(x)| \geq \frac{e_0}{2}\} \right)^{\frac{q-3}{q}} \\ &\leq \bar{C} \left(\frac{2\|\phi_n - \phi\|_{L^q}}{e_0} \right)^{q-3}. \end{aligned}$$

Thus the sequence g_n converges to g in $L^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ and finally in $L^1(\mathbb{R}^3)$. By consequence, we have the convergence $a_{\phi_n}(e_n) \rightarrow a_{\phi}(e)$ for $e \in]-\infty, 0[$.

Let us now treat the case $e = 0$. Let $M > 0$ be an arbitrary constant. Denote for all $n \in \mathbb{N}$ the space $\Omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, |\phi_n(x)| < \frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} \right\}$ and let $e_0 < 0$ such that

$$\frac{4\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\left(1 + e_0 + \frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} dx > 2M.$$

Remark that this integral is well defined since the inner function is zero out of $B(0, R)$ for

$$R = \max \left\{ 0, \frac{m(\phi)}{2|e_0|} - 1 \right\}.$$

For n large enough, we have $e_n > e_0$ and thus

$$\begin{aligned} a_{\phi_n}(e_n) &\geq \frac{4\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_n} \left(\left(1 + e_0 + \frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} dx \\ &\geq 2M - \frac{4\pi}{3} \int_{\Omega_n} \left(\left(1 + e_0 + \frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} dx \end{aligned}$$

To prove that the second term converges to 0 as $n \rightarrow +\infty$, we remark that the set of integration of this term is $\Omega_n \cap B(0, R)$. Now, from the definitions of $m(\phi)$ and Ω_n , we have for all $x \in \Omega_n$

$$\phi_n(x) - \phi(x) \geq -\frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} + \frac{m(\phi)}{1+|x|} \geq \frac{m(\phi)}{2(1+|x|)},$$

and thus

$$\|\phi_n - \phi\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}^q \geq \int_{\Omega_n} \left(\frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} \right)^q dx \geq \int_{\Omega_n \cap B(0, R)} \left(\frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} \right)^q dx.$$

Since ϕ_n converges to ϕ in $L^q(\mathbb{R}^3)$, we deduce that the measure of the set $\Omega_n \cap B(0, R)$ converges to 0, which implies that the integral

$$\int_{\Omega_n} \left(\left(1 + e_0 + \frac{m(\phi)}{2(1+|x|)} \right)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} dx$$

converges to 0 as $n \rightarrow +\infty$. Hence for n large enough $a_{\phi_n}(e_n) \geq M$, which concludes the proof of the convergence of $a_{\phi_n}(e_n)$.

To prove that $a_{\phi_n}^{-1}(s_n) \rightarrow a_{\phi}^{-1}(s)$, we denote $e_n := a_{\phi_n}^{-1}(s_n)$. We know from the above result that, if e_n converges to $e \in [0, +\infty]$, then

$$s_n = a_{\phi_n}(e_n) \rightarrow a_{\phi}(e).$$

Hence, any subsequence of $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges to $e = a_{\phi}^{-1}(s)$, which gives the convergence of the whole sequence $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to $e = a_{\phi}^{-1}(s)$. The proof of (iii) is complete.

Proof of (iv): We recall that $h = \tilde{\phi} - \phi$ with $\phi, \tilde{\phi} \in \Phi_q$ and that $\lambda \in [0, 1]$. From the convexity of Φ_q , the function $\phi + \lambda h$ belongs to Φ_q and $a_{\phi+\lambda h}$ is well-defined. For $e < 0$ fixed, we aim to differentiate on $(0, 1)$ the function

$$\lambda \mapsto a_{\phi+\lambda h}(e) = \frac{4\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3} ((1 + e - \phi(x) - \lambda h(x))_+^2 - 1)_+^{\frac{3}{2}} dx.$$

First, the set of integration satisfies

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : (\phi + \lambda h)(x) < e\} \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \phi(x) < e\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : \tilde{\phi}(x) < e\},$$

which is included in a compact set of \mathbb{R}^3 . Now, we have for all x in this set

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\left((1 + e - \phi(x) - \lambda h(x))_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{3}{2}} \right] = 3K(e - \phi(x) - \lambda h(x)) h(x),$$

where $K(\eta) = \left((1 + \eta)_+^2 - 1 \right)_+^{\frac{1}{2}} (1 + \eta)$. This derivative can be bound uniformly with respect to λ by

$$\begin{aligned} K(e - \phi(x) - \lambda h(x)) |h(x)| &\leq K(e - \phi(x) - \tilde{\phi}(x)) |\phi(x) + \tilde{\phi}(x)| \\ &\leq C \left(1 + |\phi(x) - \tilde{\phi}(x)|^3 \right), \end{aligned}$$

which, combined with the fact that $\phi + \tilde{\phi} \in L_{loc}^3(\mathbb{R}^3)$ allows the Lebesgue dominated convergence theorem and thus implies (iv).

Proof of (v): Let $s \in \mathbb{R}_+^*$. The continuity of $\lambda \mapsto a_{\phi + \lambda h}^{-1}(s)$ comes directly from (iii). Let us differentiate this function on $\lambda_0 \in (0, 1)$. Denote $\phi_0 = \phi + \lambda_0 h$ and $\phi_\lambda = \phi + \lambda h$ with $\lambda \neq \lambda_0$. Then we rewrite

$$\frac{a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - a_{\phi_0}^{-1}(s)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - a_{\phi_0}^{-1}(s)}{a_{\phi_0}(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s)) - a_{\phi_0}(a_{\phi_0}^{-1}(s))} \frac{a_{\phi_0}(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s)) - a_{\phi_\lambda}(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s))}{\lambda - \lambda_0}.$$

Since $a_{\phi_\lambda}^{-1}(s)$ converges to $a_{\phi_0}^{-1}(s)$ as $\lambda \rightarrow \lambda_0$, the first term satisfies

$$\frac{a_{\phi_\lambda}^{-1}(s) - a_{\phi_0}^{-1}(s)}{a_{\phi_0}(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s)) - a_{\phi_0}(a_{\phi_0}^{-1}(s))} \rightarrow \frac{1}{a'_{\phi_0}(a_{\phi_0}^{-1}(s))} \text{ as } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

and the second term satisfies

$$\frac{a_{\phi_0}(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s)) - a_{\phi_\lambda}(a_{\phi_\lambda}^{-1}(s))}{\lambda - \lambda_0} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{\phi + \lambda h} \left(a_{\phi_0}^{-1}(s) \right) \Big|_{\lambda = \lambda_0}.$$

Using (3.4.9), we finally get the expression (3.4.10). □

Lemma 3.4.3 (Changes of variables). *Let $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $G \in L^1(\mathbb{R}_+)$ and for all $(x, v) \in \mathbb{R}^6$*

$$e(x, v) = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x).$$

Then

$$\begin{aligned} \int_{e(x, v) < 0} \alpha(e(x, v)) G(a_\phi(e(x, v))) dx dv &= \int_{\inf \phi}^0 \alpha(e) G(a_\phi(e)) a'_\phi(e) de \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha(a_\phi^{-1}(s)) G(s) ds, \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

where $\inf \phi$ is the essential infimum of ϕ .

Proof. We perform the change of variable $e = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x)$, with respect to the velocity variable v to get

$$\begin{aligned} & \int_{e(x,v) < 0} \alpha(e(x,v)) G(a_\phi(e(x,v))) dx dv \\ &= 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\phi(x)}^0 \alpha(e) G(a_\phi(e)) ((1+e-\phi(x))_+^2 - 1)_+^{\frac{1}{2}} (1+e-\phi(x)) de \\ &= \int_{\inf \phi}^0 \alpha(e) G(a_\phi(e)) a'_\phi(e) de. \end{aligned}$$

We have then directly (3.4.11) since a_ϕ is a \mathcal{C}^1 -diffeomorphism from $(\inf \phi, 0)$ onto \mathbb{R}_+^* . \square

3.4.2 Rearrangement with respect to the microscopic energy

We use now this jacobian to define a new rearrangement of any $f \in \mathcal{E}_p$ with respect to the microscopic energy $\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x)$, where ϕ belongs to Φ_q given by (3.2.1). We first recall some basic properties of the classical Schwarz symmetrization.

Lemma 3.4.4 (Schwarz symmetrization). *Let $f \in \mathcal{E}_p$, nonzero, with $p > \frac{3}{2}$. We define the Schwarz symmetrization f^* of f on \mathbb{R}_+^* by*

$$\forall t > 0, \quad f^*(t) = \inf\{s \geq 0, \quad \mu_f(s) \geq t\},$$

where μ_f is the distribution function of f defined by (3.1.7). Then f^* is the unique nonincreasing function on \mathbb{R}_+^* such that f and f^* have the same distribution function

$$\forall s \geq 0, \mu_f(s) = \mu_{f^*}(s).$$

Moreover, if f is continuous then f^* is continuous. In particular, Q^* is continuous.

Now, from this Schwarz symmetrisation, we define a new rearrangement with respect to the microscopic energy.

Lemma 3.4.5 (Symmetric rearrangement of f with respect to the microscopic energy). *Let $f \in \mathcal{E}_p$, nonzero, with $p > \frac{3}{2}$ and $\phi \in \Phi_q$. Let f^* be the Schwarz rearrangement of f in \mathbb{R}^6 . We recall that the function $f^{*\phi}$ is defined by*

$$f^{*\phi}(x, v) = \begin{cases} f^* \left(a_\phi \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \right) \right) & \text{if } \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) < 0, \\ 0 & \text{if } \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \geq 0. \end{cases} \quad (3.4.12)$$

Then,

(i) $f^{*\phi}$ is equimeasurable with f , which means

$$f^{*\phi} \in Eq(f) = \{g \in L_+^1 \cap L^p \text{ with } \mu_g = \mu_f\}. \quad (3.4.13)$$

(ii) $f^{*\phi}$ belongs to \mathcal{E}_p with

$$\left\| |v| f^{*\phi} \right\|_{L^1} \leq C \left(\|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^1}^{\frac{2(2p-3)}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{6(p-1)}} + \|f\|_{L^1} \right). \quad (3.4.14)$$

(iii) A function Q as defined in Theorem 3.1.1 satisfies

$$F = Q^* \circ a_{\phi_Q} \text{ on } \mathbb{R}_-^* \text{ and } Q = Q^{*\phi_Q} \text{ on } \mathbb{R}^6.$$

(iv) Let $f, g \in \mathcal{E}_p$ satisfying $\mu_g \leq \mu_f$ and $\phi \in \Phi$, then

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \right) (g - f^{*\phi}) dx dv \geq 0. \quad (3.4.15)$$

with equality if and only if $g = f^{*\phi}$. In particular

$$\mathcal{H}(g) \geq \mathcal{H}(f^{*\phi_g}) + \frac{1}{2} \left\| \nabla \phi_g - \nabla \phi_{f^{*\phi_g}} \right\|_{L^2}^2 \geq \mathcal{H}(f^{*\phi_g}), \quad (3.4.16)$$

with equality if and only if $g = f^{*\phi_g}$.

Proof of Lemma 3.4.5. (i) Equimeasurability: Let $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ satisfying $\beta(0) = 0$. Using the change of variable given by (3.4.11) we have

$$\int_{\mathbb{R}^6} \beta(f^{*\phi}(x, v)) dx dv = \int_0^{+\infty} \beta(f^*(s)) ds = \int_{\mathbb{R}^6} \beta(f(x, v)) dx dv,$$

which gives the equimeasurability of f and $f^{*\phi}$.

(ii) *Control of the kinetic energy:* From the definition of $f^{*\phi}$, see (3.2.5), we have

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \right) f^{*\phi} \leq 0,$$

and

$$- \int_{\mathbb{R}^6} \phi(x) f^{*\phi}(x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi(x) \cdot \nabla \phi_{f^{*\phi}}(x) dx.$$

Thus, from the Cauchy-Schwartz inequality

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^6} |v| f^{*\phi} &\leq \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 \right) f^{*\phi} + \left\| f^{*\phi} \right\|_{L^1} \\ &\leq \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\nabla \phi_{f^{*\phi}}\|_{L^2} + \|f\|_{L^1}. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Moreover, the interpolation inequality (3.1.11) and the equimeasurability of f and $f^{*\phi}$ yield

$$\|\nabla \phi_{f^{*\phi}}\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{6(p-1)}} \left\| |v| f^{*\phi} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4.18)$$

Hence the inequalities (3.4.17) and (3.4.18) imply

$$\int_{\mathbb{R}^6} |v| f^{*\phi} - K(\phi, f) \left(\int_{\mathbb{R}^6} |v| f^{*\phi} \right)^{\frac{1}{2}} - \|f\|_{L^1} \leq 0,$$

with

$$K(\phi, f) = C \|\nabla \phi\|_{L^2} \|f\|_{L^1}^{\frac{2p-3}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{6(p-1)}}.$$

The control of the kinetic energy (3.4.14) follows.

(iii) *The profil Q , fixed point for the rearrangement $f^{*\phi}$:* From the assumptions on Q in theorem 3.1.1, the measure of the support of Q is $a_{\phi_Q}(e_Q)$ and the function F is a strictly decreasing \mathcal{C}^1 -diffeomorphism from $[\min \phi_Q, e_Q]$ onto $[0, \|Q\|_\infty]$. Thus we have for all $e \in [\min \phi_Q, e_0]$,

$$\begin{aligned} a_{\phi_Q}(e) &= \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6 : F \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \right) > F(e) \right\} \\ &= \text{meas} \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6 : Q(x, v) > F(e) \right\} \\ &= \text{meas} \left\{ s \in \mathbb{R}_+^* : Q^*(s) > F(e) \right\}, \end{aligned}$$

from the definition of the Schwarz symmetrization Q^* . We rewrite this equality: for all $a \in [0, \|Q\|_\infty]$

$$a_{\phi_Q} \circ F^{-1}(a) = \text{meas} \left\{ s \in \mathbb{R}_+^* : Q^*(s) > a \right\}. \quad (3.4.19)$$

We know that Q^* is a decreasing function on $[0, \text{meas}(\text{Supp}(Q))] = [0, a_{\phi_Q}(e_Q)]$. The equality (3.4.19) and the continuity of $a_{\phi_Q} \circ F^{-1}$ imply the strict decrease of Q^* . Moreover, since the Schwarz symmetrisation conserves the continuity, Q^* is continuous on $[0, a_{\phi_Q}(e_Q)]$. We conclude that, for all $a \in [0, \|Q\|_\infty]$,

$$Q^* \left(\text{meas} \left\{ s \in \mathbb{R}_+^* : Q^*(s) > a \right\} \right) = a.$$

We deduce that for all $e \in [\min \phi_Q, e_Q]$, $F(e) = Q^* \circ a_{\phi_Q}(e)$, which implies in particular $0 = F(e_Q) = Q^* \circ a_{\phi_Q}(e_Q)$. But $Q^* \circ a_{\phi_Q}$ is decreasing on R_-^* and we also have

$$F = Q^* \circ a_{\phi_Q} \text{ on } [\min \phi_Q, 0]. \quad (3.4.20)$$

Let now for all $(x, v) \in \mathbb{R}^6$

$$e(x, v) := \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_Q(x) \in [\min \phi_Q, +\infty).$$

If $e(x, v) \leq 0$, from (3.4.20), we have $Q(x, v) = F(e(x, v)) = Q^{*\phi_Q}(x, v)$. If $e(x, v) > 0$, from the definition of $Q^{*\phi_Q}$, we have $Q^{*\phi_Q}(x, v) = 0 = F(e(x, v)) = Q(x, v)$.

(iv) *The Hamiltonian of the rearrangement:* Let $f, g \in \mathcal{E}_p$. Then

$$\begin{aligned}\|\nabla\phi_g - \nabla\phi_f\|_{L^2}^2 &= - \int_{\mathbb{R}^6} (\phi_g - \phi_f)(g - f) dx dv \\ &= - \int_{\mathbb{R}^6} \phi_g g dx dv - \int_{\mathbb{R}^6} \phi_f f dx dv + 2 \int_{\mathbb{R}^6} \phi_g f dx dv,\end{aligned}$$

where we use $\int \phi_f g = - \int \nabla\phi_f \nabla\phi_g = \int \phi_g f$. Finally we have

$$\|\nabla\phi_g - \nabla\phi_f\|_{L^2}^2 = -2 \int_{\mathbb{R}^6} \phi_g (g - f) dx dv + \|\nabla\phi_f\|_{L^2}^2 - \|\nabla\phi_g\|_{L^2}^2.$$

Thus we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(g) - \mathcal{H}(f) &= \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 \right) (g - f) dx dv + \frac{1}{2} \left(\|\nabla\phi_f\|_{L^2}^2 - \|\nabla\phi_g\|_{L^2}^2 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_g \right) (g - f) dx dv + \frac{1}{2} \|\nabla\phi_g - \nabla\phi_f\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

where the Hamiltonian is defined by (3.1.4). We apply this equality to $g, f^{*\phi_g} \in \mathcal{E}_p$ with g nonzero and $f \in \mathcal{E}_p$ to get

$$\mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(f^{*\phi_g}) + \frac{1}{2} \|\nabla\phi_g - \nabla\phi_{f^{*\phi_g}}\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi_g \right) (g - f^{*\phi_g}) dx dv.$$

Hence, to prove the inequality (3.4.16), it is sufficient to prove (3.4.15).

Let $f \in \mathcal{E}_p$, $g \in \mathcal{E}_p$, $\phi \in \Phi_q$ and let T defined by

$$T = \int_{\mathbb{R}^6} \left(\sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \right) (g - f^{*\phi}) dx dv. \quad (3.4.21)$$

The claim $T \geq 0$ is a classical inequality for the rearrangements (see [43] for the Schwarz rearrangement for example and [42] for the new rearrangement). To simplify the notation we define

$$e(x, v) = \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x),$$

and we use the layer cake representation

$$f(x, v) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{t < f(x, v)} dt$$

to find

$$T = \int_0^{+\infty} dt \left(\int_{S_1(t)} e(x, v) dx dv - \int_{S_2(t)} e(x, v) dx dv \right), \quad (3.4.22)$$

where

$$S_1(t) = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, f^{*\phi}(x, v) \leq t < g(x, v) \right\},$$

$$S_2(t) = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^6, g(x, v) \leq t < f^{*\phi}(x, v) \right\}.$$

Now, from the properties about the pseudo-inverse of $f^* \circ a_\phi$, we deduce that

$$e(x, v) \geq (f^* \circ a_\phi)^{-1}(t), \text{ for all } (x, v) \in S_1(t),$$

and, from $\mu_g \leq \mu_f$, we have for all $t \in \mathbb{R}^+$, $\text{meas}(S_1(t)) \leq \text{meas}(S_2(t))$. Thus, since $(f^* \circ a_\phi)^{-1} \leq 0$,

$$T \geq \int_0^{+\infty} dt \int_{S_2(t)} \left((f^* \circ a_\phi)^{-1}(t) - e(x, v) \right) dx dv.$$

But,

$$e(x, v) < (f^* \circ a_\phi)^{-1}(t), \text{ for all } (x, v) \in S_2(t),$$

which implies on the one hand that $T \geq 0$ and in the other hand that, if $T = 0$, we have, for almost all $t \in \mathbb{R}_+$, $\text{meas}(S_2(t)) = 0$. Thus we have, almost everywhere $\text{meas}(S_1(t)) = \text{meas}(S_2(t)) = 0$ which gives $g = f^{*\phi}$. □

Now we give a lemma in which states a method to inverse clearly the function $f^* \circ a_\phi$.

Lemma 3.4.6 (Pseudo inverse of $f^* \circ a_\phi$). *Let $f \in \mathcal{E}_p$, nonzero, with $p > \frac{3}{2}$ and $\phi \in \Phi_q$. Let f^* the Schwartz rearrangement of f in \mathbb{R}^6 . We define the pseudo inverse of $f^* \circ a_\phi$ for $s \in (0, \|f\|_{L^\infty})$ as*

$$(f^* \circ a_\phi)^{-1}(s) = \sup\{e \in (\inf \phi, 0) : f^* \circ a_\phi(e) > s\}. \quad (3.4.23)$$

Then $(f^ \circ a_\phi)^{-1}$ is a nonincreasing function from $(0, \|f\|_{L^\infty})$ to $(\inf \phi, 0)$ and for all $(x, v) \in \mathbb{R}^6$ and $s \in (0, \|f\|_{L^\infty})$,*

$$f^{*\phi}(x, v) > s \Rightarrow \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \leq (f^* \circ a_\phi)^{-1}(s), \quad (3.4.24)$$

and

$$f^{*\phi}(x, v) \leq s \Rightarrow \sqrt{|v|^2 + 1} - 1 + \phi(x) \geq (f^* \circ a_\phi)^{-1}(s). \quad (3.4.25)$$

For the proof of this lemma, we refer to [42].

Chapitre 4

Etude numérique du système de Vlasov-Poisson en coordonnées radiales

4.1 Introduction

4.1.1 Présentation générale

Notre but dans ce chapitre est de développer un schéma numérique pour le système de Vlasov-Poisson en coordonnées radiales, *i.e* en $r = |x|$, $u = |v|$ et $s = x \cdot v$. Cette étude est motivée par deux aspects : valider les résultats théoriques existants et conjecturer de nouveaux résultats pour ce système. Plus précisément, on cherchera un schéma qui conserve la masse et le Hamiltonien pour garantir sa robustesse puis on donnera les pistes pour une étude future du comportement global d'une solution pour une fonction initiale donnée. Le but futur est ainsi, d'une part, de confirmer la stabilité de solutions stationnaires de la forme

$$Q = F(e),$$

où e est l'énergie microscopique associée à Q , et, d'autre part, d'étudier en temps long le comportement de solution proche de Q pour mettre en évidence une possible stabilité asymptotique ou un possible amortissement Landau.

Nous nous limitons au système de Vlasov-Poisson dans le cas radial car il n'existe pas de méthodes peu coûteuses qui permettent d'étudier le cas général. Ce manque provient de la trop grande dimension de l'espace de travail \mathbb{R}^6 . Se ramener à des coordonnées radiales, et donc à la dimension 3, n'est pas pour autant très restrictif quant aux phénomènes étudiés : le cas radial comporte en effet, à une translation en espace près, tous les états stationnaires mis en évidence dans le cas général.

Afin d'obtenir un schéma numérique conservatif, nous nous intéresserons uniquement à des méthodes de différences finies. Notons qu'il existe d'autres manières d'aborder numériquement ce type d'équations cinétiques : par exemple par méthode PIC (Particule In Cell), voir [56] ou par séparation de l'opérateur de transport (operator Splitting), voir [32].

Cependant ces méthodes ne sont pas conservatives.

Avant d'introduire un schéma numérique pour l'équation de Vlasov-Poisson radiale, commençons par effectuer des rappels sur cette équation. Tout d'abord, le système de Vlasov-Poisson s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(t = 0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

pour lequel le potentiel ϕ_f vérifie

$$\begin{cases} \Delta \phi_f(x) = \rho_f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, v) dv, \\ \phi_f(x) \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Dans le cas radial, il devient

$$\partial_t f + \frac{s}{r} \partial_r f - \frac{s}{ru} \phi'_f(r) \partial_u f + (u^2 - r \phi'_f(r)) \partial_s f = 0, \quad (t, r, u, s) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (4.1.3)$$

où $\Omega = \{(r, u, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, |s| \leq ru\}$ et

$$\phi'_f(r) = \frac{1}{r^2} \int_{\tilde{r} < r} \tilde{r}^2 \rho_f(\tilde{r}) d\tilde{r} \quad \text{et} \quad \rho_f(r) = \frac{2\pi}{r} \int_{u>0, |s|<ru} f(r, u, s) u du ds.$$

Remarquons que la continuité de $\nabla_x f$ et $\nabla_v f$ en respectivement $x = 0$ et $v = 0$ implique

$$\partial_r f(r = 0, u, s = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_u f(r, u = 0, s = 0) = 0.$$

La conservation de la masse s'écrit alors

$$M(f(t)) := 8\pi^2 \int_{\Omega} f(t, r, u, s) r u dr du ds = M(f_0)$$

et celle du Hamiltonien

$$\mathcal{H}(f(t)) := 8\pi^2 \int_{\Omega} f(t, r, u, s) r u^3 dr du ds - 4\pi \int_0^{+\infty} \phi'_f(t)^2 r^2 dr = \mathcal{H}(f_0).$$

De plus, dans le cas radial, nous connaissons exactement les invariants de l'opérateur de transport

$$\frac{s}{r} \partial_r f - \frac{s}{ru} \phi'_f(r) \partial_u f + (u^2 - r \phi'_f(r)) \partial_s f,$$

qui sont l'énergie microscopique et le moment cinétique [7]

$$e = \frac{|v|^2}{2} + \phi_f(x) \quad \text{et} \quad l = |x \wedge v|.$$

Nous verrons que ces invariants sont importants dans l'étude numérique du système car ils permettent de le simplifier.

4.1.2 Choix du système de variables

Présentons différents systèmes de coordonnées adaptées à l'équation de Vlasov-Poisson radiale. Nous donnerons pour chacun de ces systèmes les avantages et les inconvénients découlant d'une approche numérique.

Variables $(r, u, s) = (|x|, |v|, x \cdot v)$: Le choix le plus naturel est de discrétiser notre équation en les variables (r, u, s) :

$$\partial_t f + \frac{s}{r} \partial_r f - \frac{s}{ru} \phi'_f(r) \partial_u f + (u^2 - r \phi'_f(r)) \partial_s f = 0, \quad (t, r, u, s) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (4.1.4)$$

où $\Omega = \{(r, u, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, |s| \leq ru\}$. Remarquons tout d'abord que malgré les apparences, puisque $|s| \leq ru$, l'équation (4.1.4) n'admet pas de singularité. Cependant, la forme du domaine Ω pose des problèmes quant au schéma numérique à adopter au niveau des bords du domaine : pour avoir une bonne approximation en $r = 0$ et $u = 0$ il faudrait prendre $ds \simeq dr du$, multipliant le temps de calcul. Avec ces variables, il paraît bien délicat d'obtenir un schéma conservatif au niveau du bord.

Variables $(r, u, \theta) = (|x|, |v|, \arccos(\frac{x \cdot v}{|x||v|}))$: Pour palier ce problème, une première alternative est de passer en coordonnées $(r, u, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$ où la variable θ est définie par $s = x \cdot v = ru \cos(\theta)$. En notant $g(r, u, \theta) = f(r, u, ru \cos(\theta))$, l'équation de Vlasov-Poisson se réécrit alors

$$\partial_t g + u \cos(\theta) \partial_r g - \phi'_g(r) \cos(\theta) \partial_u g + \frac{u^2 - r \phi'_g(r)}{ru} \sin(\theta) \partial_\theta g = 0, \quad (4.1.5)$$

Le domaine $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$ est bien plus facile à discrétiser mais une singularité est apparue en $r = 0$ et en $u = 0$. En théorie, on a

$$\partial_\theta g = -ru \sin(\theta) \partial_s f = 0 \quad \text{pour } r = 0 \text{ ou } u = 0,$$

ce qui permet de gommer cette singularité. Numériquement, il paraît très difficile de conserver cette propriété.

Variables $(r, q, l) = (|x|, \frac{x \cdot v}{|x|}, |x \wedge v|)$: C'est pourquoi dans la plupart des études numériques s'intéressant à l'équation de Vlasov-Poisson radiale, on utilise l'invariant $l = |x \wedge v|$ comme variable. Remarquez que l'utilisation de l'énergie microscopique comme variable n'est pas adaptée au problème du fait de sa dépendance en temps. Une première idée serait de passer en coordonnées (r, u, l) mais le passage $(r, u, s) \mapsto (r, u, l)$ n'est pas injectif. On préfère généralement utiliser les variables $r = |x|$, $q = \frac{s}{r} = \frac{x \cdot v}{|x|}$ et $l = |x \wedge v|$. En définissant $g(r, q, l) = g(r, \frac{s}{r}, \sqrt{r^2 u^2 - s^2}) = f(r, u, s)$, on a

$$\partial_t g + q \partial_r g + \left(\frac{l^2}{r^3} - \phi'_g(r) \right) \partial_q g = 0. \quad (4.1.6)$$

Le domaine qui s'écrit

$$\Omega = \{(r, q, l) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, 0 \leq l \leq r|q|\}$$

est agréable car à l fixé on se ramène à un demi-plan $\{r \geq 0\}$. De plus, dans un espace du type $\{r > R_0\}$, ces variables semblent tout indiquées, puisque on n'a pas de singularité en $u = 0$. Cependant, ici le cas $r = 0$ est au centre de notre étude et la singularité dans le terme l^2/r^3 est numériquement très délicate à compenser : théoriquement, elle l'est par l'explosion de $\partial_r g$ lorsque r tend vers 0.

Variables $(r, u, l) = (\text{sgn}(x \cdot v)|x|, |v|, |x \wedge v|)$: Revenons aux variables $(r = |x|, u = |v|, l = |x \wedge v|)$. Pour contourner la non-injectivité de $(r, u, s) \mapsto (r, u, l)$, séparons ce changement de variable en deux cas : le cas $s \geq 0$ donne

$$\partial_t f + u \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_r f - \phi'_f(r) \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_u f = 0 \quad (4.1.7)$$

et le cas $s \leq 0$ donne

$$\partial_t f - u \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_r f + \phi'_f(r) \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_u f = 0. \quad (4.1.8)$$

Pour éviter d'écrire ces deux équations, on prolonge artificiellement la variable r sur l'ensemble des réels \mathbb{R} . On cherche donc une fonction de distribution f définie sur l'espace

$$\Omega = \{(r, u, l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, l \leq |r|u\}$$

qui vérifie

$$\partial_t f + u \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_r f - \phi'_f(r) \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_u f = 0, \quad (4.1.9)$$

où le champ de force ϕ'_f est défini par

$$\forall r > 0, \phi'_f(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^{|r|} \tilde{r}^2 \rho_f(\tilde{r}) d\tilde{r} \quad \text{et} \quad \phi'_f(-r) = -\phi'_f(r),$$

où pour tout $r > 0$

$$\rho_f(r) = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^{+\infty} du \int_{l < |r|u} \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}}} f(r, u, l) dl.$$

Remarquons tout d'abord que le champ ϕ'_f est le prolongement par imparité du champ gravitationnel habituel. En revanche, la densité est séparée en deux selon $x \cdot v > 0$ et $x \cdot v < 0$. Le prolongement effectué nécessite qu'on s'intéresse aux conditions de raccord en $s = 0$: pour tout $(r, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ celles-ci impliquent la continuité

$$f(-r, u, l = ru) = f(r, u, l = ru) \quad (4.1.10)$$

et

$$\lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \nabla f(-r, u, l) \cdot \mathbf{n}_+ = - \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \nabla f(r, u, l) \cdot \mathbf{n}_-, \quad (4.1.11)$$

où \mathbf{n}_+ et \mathbf{n}_- sont les normales sortantes du domaine Ω respectivement en $r = l/u$ et en $r = -l/u$. La condition (4.1.11) peut se réécrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_r f(-r, u, l) = \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_r f(r, u, l), \\ \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_u f(-r, u, l) = - \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_u f(r, u, l), \\ \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_l f(-r, u, l) = - \lim_{ru \rightarrow l^+} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_l f(r, u, l). \end{array} \right. \quad (4.1.12)$$

On voit bien que la racine $\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}}$ tend vers 0 lorsque $ru \rightarrow l^+$ mais ce facteur est nécessaire dans la condition (4.1.12) car, théoriquement, les dérivées partielles de f peuvent exploser à une vitesse inversement proportionnelle à $\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}}$.

Revenons maintenant à notre objectif : trouver un schéma numérique pour cette équation. *A priori*, le domaine d'étude est ici aussi compliqué que celui correspondant aux variables (r, u, s) . Cependant, ce paramétrage présente un gros avantage : les caractéristiques sont incluses dans des plans $\{l = \text{constante}\}$ comme le montre l'absence de terme en $\partial_l f$. Ainsi, le pas de temps Δt qu'on considérera peut être variable et ne sera soumis à aucune condition CFL. De plus, pour trouver un schéma conservatif, il suffit de se limiter à une étude faite à l fixé : en effet, on a

$$M_l(t) = \int_{|r|u > l} \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}}} f(t, r, u, l) dudr = M_l(0). \quad (4.1.13)$$

Pour le Hamiltonien, sommer selon la variable l est nécessaire pour obtenir son invariance.

4.2 Etude théorique de différents schémas numériques

4.2.1 Cadre général

Plaçons nous sur un intervalle de temps $[0, T]$ pour $T > 0$ fixé et sur un domaine

$$\Omega = \cup_{l \geq 0} \Omega_l$$

où $\Omega_l = \{(r, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, |ru| \geq l\}$. En la variable temporelle t , on considère une subdivision à pas constant

$$(t_0 = 0, \dots, t_n, \dots, t_N = T) \text{ avec } t_n = n\Delta t.$$

Nous notons les pas en espace et en vitesse respectivement Δr et Δu . On définit alors les discrétisations centrées $(r_k)_{k \geq 1}$ et $(u_i)_{i \geq 1}$ telles que

$$\text{pour } k \geq 1, r_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta r \text{ et } r_{-k} = -r_k, \quad (4.2.1)$$

et

$$\text{pour } i \geq 1, \quad u_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta u. \quad (4.2.2)$$

En la variable l , nous choisissons un pas maximal Δl et un entier p tels que

$$2\Delta l < 2^p \Delta r \Delta u.$$

Nous choisissons maintenant une subdivision de \mathbb{R}_+ , notée $(\bar{l}_j)_{j \geq 0}$ et définie par

$$0 < \frac{\Delta l}{2^p} < \frac{\Delta l}{2^{p-1}} < \dots < \frac{\Delta l}{2} < \Delta l < 2\Delta l < 3\Delta l < \dots \quad (4.2.3)$$

Alors, lors de notre discrétisation nous nous placerons au centre de ces intervalles en

$$l_j = \frac{\bar{l}_j + \bar{l}_{j+1}}{2}, \quad (4.2.4)$$

pour tout $j \geq 0$. Nous noterons Δl_j la taille des intervalles $[\bar{l}_j, \bar{l}_{j+1}]$ pour tout $j \geq 0$, *i.e.*

$$\Delta l_j := \bar{l}_{j+1} - \bar{l}_j \leq \Delta l.$$

Le choix de cette discrétisation pour le domaine $\bar{\Omega}$ n'est pas anodin. D'une part, centrer les discrétisations en espace et en vitesse permet de ne pas avoir de difficultés lors de divisions par r et par u . D'autre part, on affine la discrétisation près de $l = 0$ en choisissant $4l_0 < \Delta r \Delta u$ pour s'assurer que des espaces du type

$$\{l_j, \quad l_j < |r_k| u_i\} \text{ à } r_k \text{ et } u_i \text{ fixés}$$

ne soient jamais vides.

Pour une telle discrétisation du domaine Ω , on cherche alors une approximation

$$f_{k,i,j}^n \simeq f(t_n, r_k, u_i, l_j)$$

où la fonction f satisfait l'équation

$$\partial_t f + u \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_r f - \phi'_f(r) \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 u^2}} \partial_u f = 0. \quad (4.2.5)$$

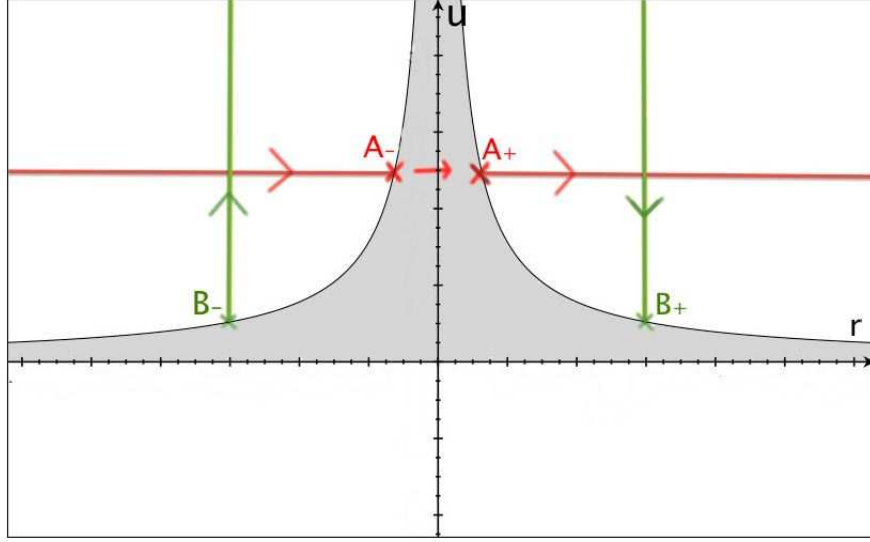
sur le domaine Ω et vérifie les conditions au bord (4.1.10) et (4.1.12).

On s'intéresse à un schéma numérique du type explicite

$$D_t f^n = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = -[u]_{u_i} \alpha_{k,i,j} D_r f^n + [\phi'_{f^n}]_{r_k} \alpha_{k,i,j} D_u f^n, \quad (4.2.6)$$

où D_r et D_u sont les opérateurs différentiels correspondant à ∂_r et ∂_u . Le terme $[u]_{u_i}$ est une approximation positive de u en u_i , le terme $[\phi'_{f^n}]_{r_k}$ est une approximation de ϕ'_{f^n} en r_k de même signe que r_k et le terme $\alpha_{k,i,j}$ est une approximation de $\sqrt{1 - \frac{l_j^2}{r_k^2 u_i^2}}$ à valeur dans $[0, 1]$.

Notons qu'il n'est pas concevable d'envisager un schéma implicite compte-tenu du nombre de variables. Ainsi, pour garantir la stabilité du schéma, on doit choisir pour $u > 0$ un schéma aval en espace, pour $r > 0$ un schéma amont en vitesse et, pour $r < 0$, un schéma aval en vitesse. Le sens du transport selon chaque coordonnée peut être modélisé à $l > 0$ fixé par



Les conditions aux limites impliquent deux propriétés : la continuité $f(A^-) = f(A^+)$ et $f(B^-) = f(B^+)$ et le transport de la masse en espace de A^- à A^+ et en vitesse de B^+ à B^- .

4.2.2 Notations et Consistance

Dans un premier temps, nous allons montrer qu'il existe un schéma numérique consistant et stable pour le système de Vlasov-Poisson radial sans tenir compte des conservations de la masse et du Hamiltonien.

Notations générales

Dans un premier temps, nous devons chercher une formulation de la densité $\rho^n \simeq \rho_{f^n}$. En effet, le calcul du potentiel ϕ'_{f^n} et le calcul de la masse sont directement liés à cette densité. Fixons $r_k > 0$. En ce point, nous devons chercher une approximation

$$\rho_k^n \simeq \rho_{f^n}(r_k) = \frac{2\pi}{r_k^2} \int_{u>0, l<|r_k|u} \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r_k^2 u^2}}} f^n(r_k, u, l) du dl.$$

La première idée serait de prendre directement

$$\rho_k^n = \frac{2\pi}{r_k^2} \sum_{\substack{i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} \frac{l_{j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{l_j^2}{r_k^2 u_i^2}}} f_{k,i,j}^n \Delta u \Delta l.$$

Cependant, comme on divise par le terme $\sqrt{1 - \frac{l_j^2}{r_k^2 u_i^2}}$ qui peut être très proche de 0, cette formulation ne conduit pas à un schéma consistant. On peut néanmoins trouver une autre formulation plus adéquate. Remarquons tout d'abord qu'à r_k et u_i fixés, on sait calculer la primitive

$$\int \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r_k^2 u_i^2}}} dl = -r_k^2 u_i^2 \sqrt{1 - \frac{l^2}{r_k^2 u_i^2}}.$$

Ainsi, on a

$$\int_0^{|r_k|u_i} \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r_k^2 u_i^2}}} f^n(r_k, u_i, l) dl = \sum_{\substack{j \\ |r_k|u_i > l_j}} m_{k,i,j} f_{k,i,j}^n + r_k^2 u_i^2 \mathcal{O}(\Delta l),$$

où, en prenant la suite (\bar{l}_j) définie par (4.2.3),

$$m_{k,i,j} = r_k^2 u_i^2 \left(\sqrt{1 - \frac{\bar{l}_j^2}{r_k^2 u_i^2}} - \sqrt{1 - \frac{\bar{l}_{k,i,j+1}^2}{r_k^2 u_i^2}} \right), \quad (4.2.7)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{l}_{k,i,j+1} = \bar{l}_{j+1} & \text{si } l_{j+1} < |r_k|u_i, \\ \bar{l}_{k,i,j+1} = |r_k|u_i & \text{si } l_{j+1} \geq |r_k|u_i. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Remarquons que pour tout (k, i, j) le coefficient $m_{k,i,j}$ appartient à $[0, 1]$. Finalement, avec les notations précédentes, on obtient

$$\rho_{f^n}(r_k) = 2\pi \sum_{\substack{i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} m_{k,i,j} f_{k,i,j}^n u_i^2 \Delta u + \mathcal{O}(\Delta l) + \mathcal{O}(\Delta u). \quad (4.2.9)$$

Avec ces notations, donnons maintenant les définitions générales qui resteront valables dans toute la suite de notre étude et auxquelles on pourra donc se référer.

Définition 4.2.1. Pour une fonction de distribution $(f_{k,i,j}^n)$, on définit la densité (ρ_k^n) , la masse M^n , le champ gravitationnel (E_k^n) et le Hamiltonien H^n par

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_k^n = \frac{2\pi}{r_k^2} \sum_{\substack{i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} m_{k,i,j} f_{k,i,j}^n \Delta u,$
- $M^n = 4\pi \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^2 \rho_k^n \Delta r = 8\pi^2 \sum_{\substack{k,i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} m_{k,i,j} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u,$
- (E_k^n) est impair, du signe de r_k et sera défini plus tard.
- $H^n = E_{cin}^n - E_{pot}^n$, avec

$$\begin{cases} E_{cin}^n = 8\pi^2 \sum_{\substack{k,i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} u_i^2 m_{k,i,j} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u \\ E_{pot}^n = 4\pi \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^2 (E_k^n)^2 \Delta r. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Définissons maintenant le schéma numérique que nous allons étudier.

Définition 4.2.2 (Schéma numérique). *Soit $(f_{k,i,j}^0)$ définie pour tout $(k, i, j) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $l_j < |r_k|u_i$ où les suites (r_k) , (u_i) et (l_j) sont définies par (4.2.1), (4.2.2) et (4.2.4). Alors on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice $(f_{k,i,j}^n)$ par*

$$D_t f^n = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = -[u]_{i,\delta(k)} \alpha_{k,i,j} D_r^{i,j} f^n + [\phi'_{f^n}]_{r_k} \alpha_{k,i,j} D_u^{k,j} f^n, \quad (4.2.11)$$

où

- pour tout (k, i, j) , les $\alpha_{k,i,j}$ sont des termes positifs,
- les $[u]_{i,\delta(k)}$ sont fonctions positives de u_i et du signe de r_k , noté $\delta(k)$,
- les $[\phi'_{f^n}]_{r_k}$ sont du même signe que r_k et ne dépendent pas de i et j .
- compte-tenu des conditions de bord, les opérateurs différentiels $D_r^{i,j}$ et $D_u^{k,j}$ peuvent dépendre de (k, i, j) .

Un schéma consistant et stable

Grâce à l'étude précédente, on peut mettre en évidence un schéma consistant, stable dans L^∞ et préservant la positivité de f^n .

$$\textbf{Schéma A : } D_t f^n = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = -u_i \alpha_{k,i,j} D_r^{i,j} f^n + E_k^n \alpha_{k,i,j} D_u^{k,j} f^n, \quad (4.2.12)$$

avec

$$\alpha_{k,i,j} = \sqrt{1 - \frac{l_j^2}{r_k^2 u_i^2}}$$

$$E_k^n = \frac{1}{r_k^2} \sum_{\tilde{k}=-k+1}^k r_{\tilde{k}}^2 \rho_{\tilde{k}}^n \Delta r = \frac{1}{r_k^2} \sum_{\tilde{k}=-k+1}^k \Delta r \sum_{\substack{i>0, j\geq 0 \\ l_j < |r_{\tilde{k}}|u_i}} m_{\tilde{k},i,j} f^n \Delta u,$$

et, où les opérateurs différentiels sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i > 0, & D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{k-1}^n}{\Delta r} \quad \text{si } r_{k-1} > \frac{l_j}{u_i} \text{ ou } r_k < -\frac{l_j}{u_i} \\ \forall k > 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_i \geq \frac{l_j}{r_k} \\ \forall k < 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_{i-1} \geq \frac{l_j}{r_k}, \end{array} \right. \quad (4.2.13)$$

et au bord,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i > 0, & D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{-k-1}^n}{\Delta r + 2 \left(r_k - \frac{l_j}{u_i} \right)} \quad \text{si } r_{k-1} \leq \frac{l_j}{u_i} < r_k \\ \forall k < 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_{-k,i}^n - f_{k,i+1}^n}{\Delta u + 2 \left(u_i - \frac{l_j}{r_k} \right)} \quad \text{si } u_{i-1} < \frac{l_j}{r_k} \leq u_i. \end{array} \right. \quad (4.2.14)$$

Remarquons que E_k^n vérifie la condition

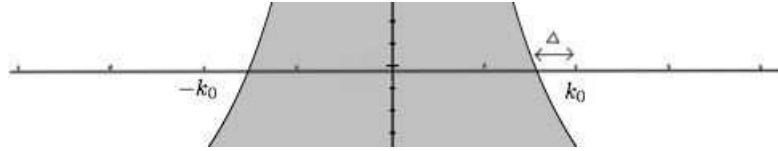
$$(E_k^n) \text{ est impair, } E_k^1 = \rho_1^n \Delta r, \quad \text{et, } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad D_r(r_k^2 E_k^n) = r_k^2 (\rho_k^n + \rho_{-k}^n) \Delta r,$$

où D_r est l'opérateur correspondant à un schéma d'Euler explicite aval. Ceci importe peu ici mais sera capitale pour la conservation du Hamiltonien.

Consistance et stabilité du Schéma A : Commençons par étudier la stabilité du schéma A. Pour conserver la positivité de f^n et avoir la stabilité L^∞ du schéma, il suffit de manière très classique de satisfaire la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) suivante

$$u_i \frac{\Delta t}{3\Delta r} + |E_k^n| \frac{\Delta t}{3\Delta u} < 1. \quad (4.2.15)$$

Maintenant, d'après l'étude générale faite précédemment, la consistance du schéma provient directement des opérateurs d'ordre 1 choisis. Pour motiver ce choix, travaillons en une dimension 1 et plaçons nous sur la droite $(u, l) = (u_i, l_j)$. Nous notons alors $k_0 \in \mathbb{N}^*$ le plus petit $k > 0$ tel que $r_k u_i > l_j$:



Lorsqu'on peut le définir et donc à une certaine distance du bord, on prend comme discrétisation

$$D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{k-1}^n}{\Delta r} \quad \text{si } k > k_0 \text{ ou } k \leq -k_0. \quad (4.2.16)$$

De plus, en k_0 , près du bord, au sens des conditions au bord données auparavant, la consistance est satisfaite pour

$$D_{r_{k_0}} f^n = \frac{f_{k_0}^n - f_{-k_0}^n}{2\Delta}.$$

Cependant, une telle discrétisation risque de demander une condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) trop restrictive pour conserver la positivité de f^n : en effet, le pas 2Δ peut être bien plus petit que Δr . C'est pourquoi dans nos schémas, on considérera un opérateur du type

$$D_{r_{k_0}} f^n = \frac{f_{k_0}^n - f_{-k_0-1}^n}{2\Delta + \Delta r}, \quad (4.2.17)$$

qui est consistant et qui ne demandera pas une condition CFL trop stricte au niveau des bords.

Les résultats des tests numériques, faits à partir du schéma A défini par (4.2.12), sont exposés dans la partie 4.3. Nous voyons en particulier que la masse n'est pas conservée.

4.2.3 Conservation de la masse

Critères de conservation de la masse

Nous cherchons ici à modifier le schéma A pour conserver la masse M^n donnée par la définition (4.2.1). Dans le but de simplifier les notations, commençons par étendre celles-ci à l'espace $u < 0$ en faisant la symétrie par rapport à l'axe $(r, u) = (0, 0)$. Ainsi pour toute matrice $\gamma_{k,i,j}$ et pour tout $(k, i, j) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a

$$\gamma_{-i,k,j} = \gamma_{i,-k,j},$$

et l'opérateur $D^{-i,k,j}$ est défini à partir de $D^{k,i,j}$ par

$$D^{k,-i,j} \gamma_{k,-i,j} = D^{k,i,j} \gamma_{k,i,j},$$

pour toute matrice $\gamma_{k,i,j}$. Ces nouvelles notations permettent en particulier d'écrire plus simplement à $k > 0$ et $j \geq 0$ fixés

$$\sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ |u_i| < l_j / r_k}} (\gamma_{k,i,j} + \gamma_{-k,i,j}) \Delta u = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}^* \\ |u_i| < l_j / r_k}} \gamma_{k,i,j} \Delta u.$$

En particulier, en définissant les espaces

$$\begin{aligned} U^+ &= \{(k, i, j) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \ l_j < |r_k u_i|\}, \\ R^+ &= \{(k, i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}, \ l_j < |r_k u_i|\}, \end{aligned}$$

on a

$$\sum_{(k,i,j) \in U^+} \gamma_{k,i,j} = \sum_{(k,i,j) \in R^+} \gamma_{k,i,j}.$$

Maintenant, énonçons un lemme donnant des conditions suffisantes pour la conservation de la masse.

Lemme 4.2.3. *La masse donnée par la définition 4.2.1 est conservée par le schéma (4.2.11) si les opérateurs de différences finies $D_r^{i,j}$ et $D_u^{k,j}$ et les coefficients $\alpha_{k,i,j}$ satisfont les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall(k, i, j), \quad (D_r^{i,j})^* \left(m_{k,i,j} \alpha_{k,i,j} [u]_{i,\delta(k)} \right) = 0, \\ (ii) \quad & \forall(k, i, j), \quad (D_u^{k,j})^* (m_{k,i,j} \alpha_{k,i,j}) = 0. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

où les opérateurs adjoints $(D_r^{i,j})^*$ et $(D_u^{k,j})^*$ sont définis par : pour toutes matrices $(\gamma_{k,i,j})$ et $(g_{k,i,j})$ définies sur Ω ,

$$\forall(i, j), \quad \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^* \\ |r_k| < l_j / u_i}} \gamma_{k,i,j} D_r^{i,j} g_{k,i,j} \Delta r = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ |r_k| < l_j / u_i}} g_{k,i,j} (D_r^{i,j})^* \gamma_{k,i,j} \Delta r, \tag{4.2.19}$$

et

$$\forall(k, j), \quad \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}^* \\ |u_i| < l_j / r_k}} \gamma_{k,i,j} D_u^{k,j} g_{k,i,j} \Delta u = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}^* \\ |u_i| < l_j / r_k}} g_{k,i,j} (D_u^{k,j})^* \gamma_{k,i,j} \Delta u, \tag{4.2.20}$$

Remarque : Notons que, si $[u]_{i,\delta(k)} = [u]_i$ ne dépend pas de k , la conservation de la masse ne dépend ni du choix de $[u]_i$ et ni de $\left[\phi'_{f^n} \right]_{r_k}$ dans le schéma numérique (4.2.11). De plus, si cette propriété est vérifiée, notons que lorsque les opérateurs $(D_r^{i,j})^*$ et $(D_u^{k,j})^*$ sont indépendants respectivement de (i, j) et (k, j) , alors, il suffit d'avoir

$$(D_r^{i,j})^*(1) = (D_u^{k,j})^*(1) = 0$$

et d'avoir $\alpha_{k,i,j} m_{k,i,j}$ indépendant de k et de i .

Démonstration du lemme 4.2.3. Les définitions 4.2.1 et le schéma (4.2.11) impliquent

$$D_t M^n = 8\pi^2 \sum_{(k,i,j) \in U^+} m_{k,i,j} D_t f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u = 8\pi^2 \Delta r \Delta u (\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

où

$$\Sigma_1 = \sum_{(k,i,j) \in U^+} [u]_{i,\delta(k)} m_{k,i,j} \alpha_{k,i,j} D_{r_k} f_{k,i,j}^n = \sum_{(k,i,j) \in U^+} f_{k,i,j}^n (D_r^{k,j})^* ([u]_{i,\delta(k)} m_{k,i,j} \alpha_{k,i,j}),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{(k,i,j) \in R^+} [\phi'_{f^n}]_{r_k} m_{k,i,j} \alpha_{k,i,j} D_{u_i} f_{k,i,j}^n = \sum_{(k,i,j) \in R^+} [\phi'_{f^n}]_{r_k} f_{k,i,j}^n (D_u^{k,j})^* (m_{k,i,j} \alpha_{k,i,j}).$$

Il suffit maintenant d'appliquer les conditions (4.2.18) pour obtenir la conservation de la masse. \square

Un exemple de schéma conservant la masse

En nous basant sur le lemme 4.2.3, nous pouvons définir un schéma conservatif.

$$\text{Schéma B : } D_t f^n = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = -u_i \alpha_{k,i,j} D_r^{i,j} f^n + E_k^n \alpha_{k,i,j} D_u^{k,j} f^n, \quad (4.2.21)$$

avec

$$\alpha_{k,i,j} = \frac{l_j \Delta l_j}{m_{k,i,j}}. \quad (4.2.22)$$

$$E_k^n = \frac{1}{r_k^2} \sum_{\tilde{k}=-k+1}^k r_{\tilde{k}}^2 \rho_{\tilde{k}}^n \Delta r = \frac{1}{r_k^2} \sum_{\tilde{k}=-k+1}^k \Delta r \sum_{\substack{i>0, j \geq 0 \\ l_j < |r_{\tilde{k}}| u_i}} m_{\tilde{k},i,j} f^n \Delta u,$$

et, où les opérateurs différentiels sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i > 0, & D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{k-1}^n}{\Delta r} \quad \text{si } r_{k-1} > \frac{l_j}{u_i} \text{ ou } r_k < -\frac{l_j}{u_i} \\ \forall k > 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_i \geq \frac{l_j}{r_k} \\ \forall k < 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_{i-1} \geq \frac{l_j}{r_k}, \end{array} \right. \quad (4.2.23)$$

et au bord,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i > 0, & D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{-k}^n}{\Delta r} \quad \text{si } r_{k-1} \leq \frac{l_j}{u_i} < r_k \\ \forall k < 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_{-k,i}^n - f_{k,i}^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_{i-1} < \frac{l_j}{r_k} \leq u_i. \end{array} \right. \quad (4.2.24)$$

Proposition 4.2.4. *Le schéma numérique (4.2.21) conserve la masse M^n donnée par la définition 4.2.1. De plus, si la condition CFL suivante est respectée,*

$$2u_i \frac{\Delta t}{\Delta r} + 2|E_k^n| \frac{\Delta t}{\Delta u} < 1, \quad (4.2.25)$$

il conserve la positivité de f^n et est stable dans L^∞ .

Conservation de la masse : Nous pouvons vérifier que pour tout (k, i, j) nous avons

$$\alpha_{k,i,j} m_{k,i,j} = l_j \Delta l_j, \quad \text{et} \quad (D_r^{i,j})^*(1) = (D_u^{k,j})^*(1) = 0.$$

Ainsi, d'après le lemme 4.2.3, le schéma B conserve la masse.

Loin du bord : Prenons $(k, i, j) \in U^+$ tel que

$$l_{j+1} < |r_k|u_i, \quad |r_k| - \Delta r > \frac{l_j}{u_i} \quad \text{et} \quad u_{i-1} > \frac{l_j}{|r_k|}.$$

Rappelons que, d'après (4.2.4), l_j est le centre du segment $[\bar{l}_j, \bar{l}_{j+1}]$ et Δl_j est sa longueur. Ainsi, en remarquant que

$$\left(1 - \frac{\bar{l}_j^2}{r_k^2 u_i^2}\right) - \left(1 - \frac{\bar{l}_{j+1}^2}{r_k^2 u_i^2}\right) = \frac{\bar{l}_{j+1}^2 - \bar{l}_j^2}{r_k^2 u_i^2} = \frac{l_j \Delta l_j}{r_k^2 u_i^2},$$

la définition de $m_{k,i,j}$ donnée par (4.2.7) implique

$$\alpha_{k,i,j} = \frac{l_j \Delta l_j}{m_{k,i,j}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{\bar{l}_j^2}{r_k^2 u_i^2}} + \sqrt{1 - \frac{\bar{l}_{k,i,j+1}^2}{r_k^2 u_i^2}} \right) \leq 1.$$

Remarquons que cette expression est consistante tant qu'on ne s'approche pas des bords. De plus, on déduit de cette dernière inégalité que la positivité de f^n est conservée et que le schéma B est stable dans L^∞ "loin du bord" si la condition CFL

$$u_i \frac{\Delta t}{\Delta r} + |E_k^n| \frac{\Delta t}{\Delta u} < 1, \quad (4.2.26)$$

est respectée.

Près du bord : Les expressions (4.2.22) et (4.2.24) ont été clairement prises pour conserver la masse transportée d'un bord à l'autre. Les opérateurs de différences finies D_r et D_u ne sont donc pas, en général, une bonne approximation de ∂_r et ∂_u tout comme $\alpha_{k,i,j}$ n'est pas, en général, une bonne approximation de $\sqrt{1 - \frac{l_j^2}{r_k^2 u_i^2}}$. En fait, pour simplifier les calculs, on a préféré écrire

$$\alpha_{k,i,j} = \frac{l_j \Delta l_j}{m_{k,i,j}} \quad \text{et} \quad D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{-k}^n}{\Delta r},$$

plutôt que

$$\alpha_{k,i,j} = \frac{l_j \Delta l_j 2(r_k - \frac{l_j}{r_i})}{m_{k,i,j} \Delta r} \quad \text{et} \quad D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{-k}^n}{2(r_k - \frac{l_j}{r_i})},$$

mais cela revient au même. Vérifier que de telles formules sont consistantes avec les conditions aux bord (4.1.12) est très compliqué. Cependant, on peut penser que si $\alpha_{k,i,j}$ n'explose pas près du bord et donc que la condition CFL à adopter n'est pas trop restrictive, la conservation de la masse rend notre schéma robuste.

Pour borner $\alpha_{k,i,j}$, remarquons d'abord qu'il ne dépend que de $m_{k,i,j}$ et donc que de la distance de l_j au bord. En effet, si

$$l_{j+1} < |r_k|u_i,$$

on a $\alpha_{k,i,j} \leq 1$ quelques soient les valeurs de $|r_k| - \frac{l_j}{u_i}$ et de $u_i - \frac{l_j}{|r_k|}$. Remarquons qu'en réalité, dans ce cas, ces deux quantités peuvent être minorées respectivement par $u_i(l_{j+1} - l_j)$ et par $|r_k|(l_{j+1} - l_j)$ ce qui les empêche de tendre vers 0.

Maintenant, prenons (k, i, j) tel que

$$l_j < |r_k|u_i \leq l_{j+1}.$$

D'après la définition (4.2.7), on a donc

$$m_{k,i,j} = r_k^2 u_i^2 \sqrt{1 - \frac{\bar{l}_j^2}{r_k^2 u_i^2}} = |r_k|u_i (|r_k|u_i - \bar{l}_j)^{\frac{1}{2}} (|r_k|u_i + \bar{l}_j)^{\frac{1}{2}},$$

et comme $|r_k|u_i > l_j$,

$$m_{k,i,j} \geq |r_k|u_i \left(\frac{\Delta l_j}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(2\bar{l}_j + \frac{\Delta l_j}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \geq |r_k|u_i \frac{\Delta l_j}{2}.$$

Ainsi

$$\alpha_{k,i,j} = \frac{l_j \Delta l_j}{m_{k,i,j}} \leq 2 \frac{l_j}{|r_k|u_i} \leq 2.$$

Ainsi, si la condition CFL (4.2.25) est vérifiée, le schéma B est stable L^∞ et conserve la positivité de f^n .

Notons que les résultats des tests numériques effectués à partir de ce schéma sont présentés dans la partie 4.3. Nous remarquons en particulier que le Hamiltonien n'est pas conservé même s'il varie très peu. Pour remédier à cela, on modifie ce schéma dans la sous-partie suivante.

4.2.4 Conservation du Hamiltonien

Pour ne pas surcharger en notation, nous n'allons pas écrire un théorème général quant à la conservation du Hamiltonien mais nous allons directement proposer un schéma numérique vérifiant cette propriété en "dehors des bords". La démonstration de cette conservation restera cependant assez générale pour visualiser une possible généralisation à des opérateurs d'ordres plus élevés.

Nous définissons donc le schéma suivant.

$$\textbf{Schéma C : } D_t f^n = - \left(u_i - \delta(k) \frac{\Delta u}{2} \right) \alpha_{k,i,j} D_r^{i,j} f^n + \frac{E_k^n + E_k^{1+n}}{2} \alpha_{k,i,j} D_u^{k,j} f^n, \quad (4.2.27)$$

avec

$$\alpha_{k,i,j} = \frac{l_j \Delta l_j}{m_{k,i,j}}. \quad (4.2.28)$$

$$E_k^n = \frac{1}{r_k^2} \sum_{\tilde{k}=-k+1}^k r_{\tilde{k}}^2 \rho_{\tilde{k}}^n \Delta r = \frac{1}{r_k^2} \sum_{\tilde{k}=-k+1}^k \Delta r \sum_{\substack{i>0, j \geq 0 \\ l_j < |r_{\tilde{k}}| u_i}} m_{\tilde{k}, i, j} f^n \Delta u,$$

et, où les opérateurs différentiels sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i > 0, & D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{k-1}^n}{\Delta r} \quad \text{si } r_{k-1} > \frac{l_j}{u_i} \text{ ou } r_k < -\frac{l_j}{u_i} \\ \forall k > 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_i \geq \frac{l_j}{r_k} \\ \forall k < 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_{i-1} \geq \frac{l_j}{r_k}, \end{array} \right. \quad (4.2.29)$$

et au bord,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i > 0, & D_{r_k} f^n = \frac{f_k^n - f_{-k}^n}{\Delta r} \quad \text{si } r_{k-1} \leq \frac{l_j}{u_i} < r_k \\ \forall k < 0, & D_{u_i} f^n = \frac{f_{-k, i}^n - f_{k, i}^n}{\Delta u} \quad \text{si } u_{i-1} < \frac{l_j}{r_k} \leq u_i. \end{array} \right. \quad (4.2.30)$$

Remarquons que les termes $\alpha_{k, i, j}$ et les opérateurs D_r et $D_{u, \delta(k)}$ ici définis sont les mêmes que pour le schéma B. Les seuls changements ont été faits sur les termes $[u]_{i, \delta(k)}$ et $[\phi'_{f^n}]_{r_k}$ pour satisfaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall i > 0, & (D_{u_i, \delta(k)})^*(u^2) = -2[u]_{i, \delta(k)}, \\ \forall k \neq 0, & [\phi'_{f^n}]_{r_k} = \frac{E_k^{n+1} + E_k^n}{2}. \end{array} \right. \quad (4.2.31)$$

De plus, rappelons que le champ gravitationnel E_k^n satisfait

$$(E_k^n) \text{ est impair, } E_k^1 = \rho_1^n \Delta r, \quad \text{et, } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad D_r(r_k^2 E_k^n) = r_k^2 (\rho_k^n + \rho_{-k}^n) \Delta r. \quad (4.2.32)$$

Les conditions (4.2.31) et (4.2.32) s'ajoutant à la condition (4.2.18) sont les arguments permettant de déduire la conservation de la masse et du Hamiltonien. On pourrait très bien généraliser la proposition suivante à d'autres opérateurs s'ils vérifient ces conditions.

Proposition 4.2.5. *Soit une distribution f^n satisfaisant (4.2.27) et telle que son support reste dans*

$$\mathcal{A} = \left\{ (r, u, l), |r| > \frac{l}{u} + 2\Delta r \right\}.$$

Alors, si les conditions suivantes sont respectées.

(i) *Le schéma C préserve la positivité de f^n et est stable dans L^∞ tant que la condition CFL suivante est respectée :*

$$\frac{3}{2} u_i \frac{\Delta t}{\Delta r} + |E_k^{n+1} + E_k^n| \frac{\Delta t}{\Delta u} < 1, \quad (4.2.33)$$

(ii) *La masse et le Hamiltonien donnés par les définitions 4.2.1 sont conservés.*

Remarquons tout d'abord que ce schéma propose de trouver f^{n+1} après avoir calculé son champ de force E^{n+1} . Ceci ne pose pas de problème car nous pouvons quantifier les variations $D_t(E^n)$ uniquement à partir de f^n . Ce résultat correspond à l'équation (4.2.39).

Ensuite, on a perdu ici la conservation de la masse au bord. En effet, nous n'avons plus

$$(D_r^{i,j})^* \left(m_{k,i,j} \alpha_{k,i,j} [u]_{i,\delta(k)} \right) = 0,$$

au niveau du bord puisque $[u]_{i,\delta(k)}$ change de valeur lorsque que r_k change de signe.

Démonstration. La stabilité dans L^∞ , la positivité de f^n et la conservation de la masse sur l'ensemble \mathcal{A} sont toutes des propriétés découlant directement de la proposition 4.2.4.

Commençons par étudier les variations de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} D_t E_{cin}^n &= 8\pi^2 \sum_{(k,i,j) \in U^+} u_i^2 m_{k,i,j} D_t f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u \\ &= 8\pi^2 \sum_{(k,i,j) \in U^+} u_i^2 (l_j \Delta l_j) \left[-[u]_{i,\delta(k)} D_r f^n + [\phi'_{f^n}]_{r_k} D_{u,\delta(k)} f^n \right] \Delta r \Delta u. \end{aligned}$$

Comme la condition (4.2.18) est encore respectée sur \mathcal{A} et que f^n est nulle en dehors de cet ensemble, on obtient

$$\begin{aligned} D_t E_{cin}^n &= 8\pi^2 \sum_{(k,i,j) \in R^+} u_i^2 (l_j \Delta l_j) [\phi'_{f^n}]_{r_k} D_{u,\delta(k)} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u. \\ &= 8\pi^2 \sum_{(k,i,j) \in R^+} \left(D_{u,\delta(k)}^* u_i^2 \right) (l_j \Delta l_j) [\phi'_{f^n}]_{r_k} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u, \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Ainsi, en utilisant (4.2.31),

$$D_t E_{cin}^n = -16\pi^2 \sum_{(k,i,j) \in R^+} [u]_{i,\delta(k)} (l_j \Delta l_j) \frac{E_k^{n+1} + E_k^n}{2} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u. \quad (4.2.35)$$

Intéressons-nous maintenant à l'énergie potentielle. Ses variations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$D_t E_{pot}^n = 4\pi \sum_{k=1}^{+\infty} 2D_t(r_k^2 E_k^n) \frac{E_k^{n+1} + E_k^n}{2} \Delta r. \quad (4.2.36)$$

Dans le but de déterminer une formule explicite de $D_t(r_k^2 E_k^n)$, on développe $D_t(r_k^2 \rho_k^n)$ en s'aidant de la condition (4.2.18) :

$$\frac{1}{2\pi} D_t(r_k^2 \rho_k^n) = \sum_{\substack{i,j \\ |r_k| u_i > l_j}} m_{k,i,j} D_t f_{k,i,j}^n \Delta u = - \sum_{\substack{i,j \\ |r_k| u_i > l_j}} (l_j \Delta l_j) [u]_{i,\delta(k)} D_r f_{k,i,j}^n \Delta u.$$

En dehors du bord où la fonction f^n s'annule, D_r est indépendant de i et j , d'où

$$\begin{aligned} D_t(r_K^2 E_K^n) &= D_t\left(\sum_{k=-K+1}^K r_k^2 \rho_k^n \Delta r\right) \\ &= -2\pi \sum_{\substack{i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} (l_j \Delta l_j) \left([u]_{i,\delta(K)} f_{K,i,j}^n - [u]_{i,\delta(-K)} f_{-K,i,j}^n \right) \Delta u. \end{aligned}$$

Finalement, en notant que $E_{-k}^n = -E_k^n$, on obtient

$$D_t E_{pot}^n = -16\pi^2 \sum_{\substack{k,i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} l_j \Delta l_j [u]_{i,\delta(k)} \frac{E_k^{n+1} + E_k^n}{2} f_{k,i,j}^n \Delta r \Delta u. \quad (4.2.37)$$

On a ainsi la conservation du Hamiltonien en combinant (4.2.35) et (4.2.37). \square

Pour le schéma C, E_k^n doit être défini de deux manières : soit directement pour E_k^0 :

$$\forall k > 0, \quad r_k^2 E_k^0 = \sum_{\tilde{k}=-k+1}^k r_{\tilde{k}}^2 \rho_{\tilde{k}}^0 \Delta r \quad \text{et} \quad E_{-k}^0 = -E_k^0, \quad (4.2.38)$$

soit, pour $n \geq 1$, à partir de E_k^{n-1} et de f^{n-1} :

$$r_k^2 \frac{E_k^n - E_k^{n-1}}{\Delta t} = -2\pi \sum_{\substack{i,j \\ |r_k|u_i > l_j}} l_j \left([u]_{u_i}^{sgn(k)} f_{k,i,j}^{n-1} - [u]_{u_i}^{sgn(-k)} f_{-k,i,j}^{n-1} \right) \Delta u \Delta l_j. \quad (4.2.39)$$

4.3 Tests numériques

On teste maintenant les trois schémas A, B et C définis par (4.2.12), (4.2.21) et (4.2.27). Dans un premier temps, on mettra en évidence les propriétés conservatives et la convergence de ces schémas pour des données nulles ou non nulles au niveau du bord. Puis, dans un second temps, on considèrera une perturbation d'un état stationnaire et on étudiera son comportement au cours du temps.

4.3.1 Conservation de la masse et du Hamiltonien

On considère tout d'abord un état initial f_0 dont le support est assez éloigné du bord. Dans l'exemple que nous allons étudier, nous nous plaçons sur $[0, R_m] \times [0, U_m]$ avec $R_m = U_m = 1$ et nous considérons une condition initiale f_0 telle que

$$Supp(f_0) \subset \left\{ (r, u, l), \quad \frac{l}{u} + \frac{1}{8} < |r| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{l}{|r|} + \frac{1}{8} < u < \frac{1}{2} \right\}.$$

Notons que numériquement, le champ E_n^k est inférieur à 0.1. On prendra donc $\Delta t = \Delta r = \Delta u = \Delta l$. Les données seront nulles près du bord au moins jusqu'à un temps T_0 vérifiant

$$T_0 = n\Delta t = n\Delta r = 1/8 - \Delta r,$$

On s'attend donc à ce que le schéma C conserve la masse et le Hamiltonien jusqu'à ce temps. De plus, le schéma B devrait conserver la masse deux fois plus longtemps jusqu'à ce que la masse soit transportée jusqu'au bord $|r| = R_m$ et $u = U_m$. Nous considérons des pas de $\Delta = 10^{-2}$. Nous représentons l'évolution de la densité $RHO+$ et $RHO-$ correspondant respectivement à la densité ρ_k^n pour $k > 0$ et pour $k < 0$ sur les figures 4.1, 4.2 et 4.3, relatives aux schémas A, B et C.

Remarquons que la consistance du schéma A rend la courbe représentant la densité plus lisse que celles obtenues pour les schémas B et C. De plus, notons qu'il est tout à fait logique que la densité satisfaisant $r > 0$ et donc $s = x \cdot v > 0$, soit transportée vers l'extérieur et que, inversement, celle satisfaisant $s < 0$ se rapproche du centre du domaine.

Nous représentons ensuite l'évolution de la masse, figure 4.3.1 et du Hamiltonien, figure 4.3.1 pour les différents schémas.

Les variations de la masse suivent l'étude théorique faite pour les schémas A, B et C : le schéma A n'est pas conservatif, la masse correspondant au schéma C reste constante un moment avant de décroître régulièrement mais très faiblement et le schéma B conserve admirablement la masse pendant un temps assez long.

On remarque qu'à partir d'un temps d'environ $t = 1.2$, les trois masses décroissent de concert de manière rapide. On peut expliquer cela par un transport de masse théorique vers l'extérieur du domaine, en $|r| > R_m$ ou en $u > U_m$. De la même manière, on voit ce phénomène se produire sur l'évolution du Hamiltonien. Remarquons que la densité semble se concentrer près de $r = 0$, ce qui implique par conservation de la masse un élargissement du support en la variable u et qui coïncide avec ce phénomène. D'ailleurs, en prolongeant la durée d'étude on peut nettement voir un effondrement brusque de la densité en $r = 0$.

Commentons maintenant la figure 4.3.1. Les variations du Hamiltonien ne sont pas étonnantes pour le schéma A. Cependant, on remarque qu'au temps $t = 1$, le schéma B semble avoir mieux conservé le Hamiltonien que le schéma C. Cela s'explique assez facilement : les pertes et gains d'énergie se sont équilibrés au cours du temps pour le schéma B alors que le schéma C a conservé le Hamiltonien jusqu'à ce que le support de la fonction de distribution atteigne le bord singulier. Pour étayer cette explication nous agrandissons la figure 4.3.1 pour des temps petits, voir figure 4.6. Nous voyons que le schéma C conserve bien le Hamiltonien sur cet intervalle de temps. Le schéma B pour sa part le fait varier très faiblement.

Au final ces trois schémas ont leurs avantages et inconvénients : le schéma A est plus consistant au niveau des bords mais n'est pas conservatif. Le schéma B est *a priori* moins consistant que le A mais conserve la masse partout, ce qui le rendra utile lorsqu'on cherche de la convergence L^1 . Pour finir le schéma C apporte par rapport au schéma B la conservation du Hamiltonien loin des bords mais perd celle de la masse près des bords.

Dans la sous-partie suivante, nous nous intéresserons à la possibilité d'appliquer de tels schémas pour étudier le comportement asymptotique d'une solution proche d'un état stationnaire.

FIGURE 4.1 – Evolution de la densité pour le schéma A

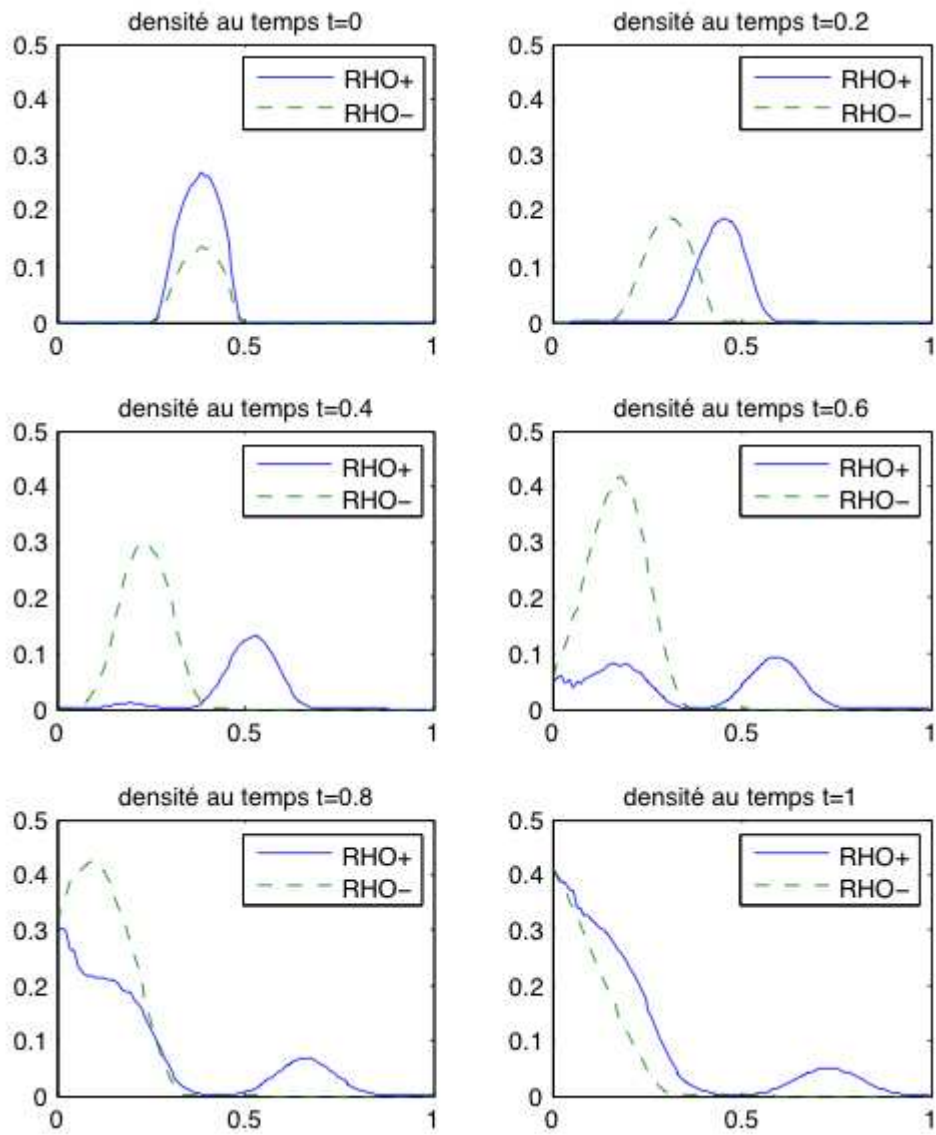


FIGURE 4.2 – Evolution de la densité pour le schéma B

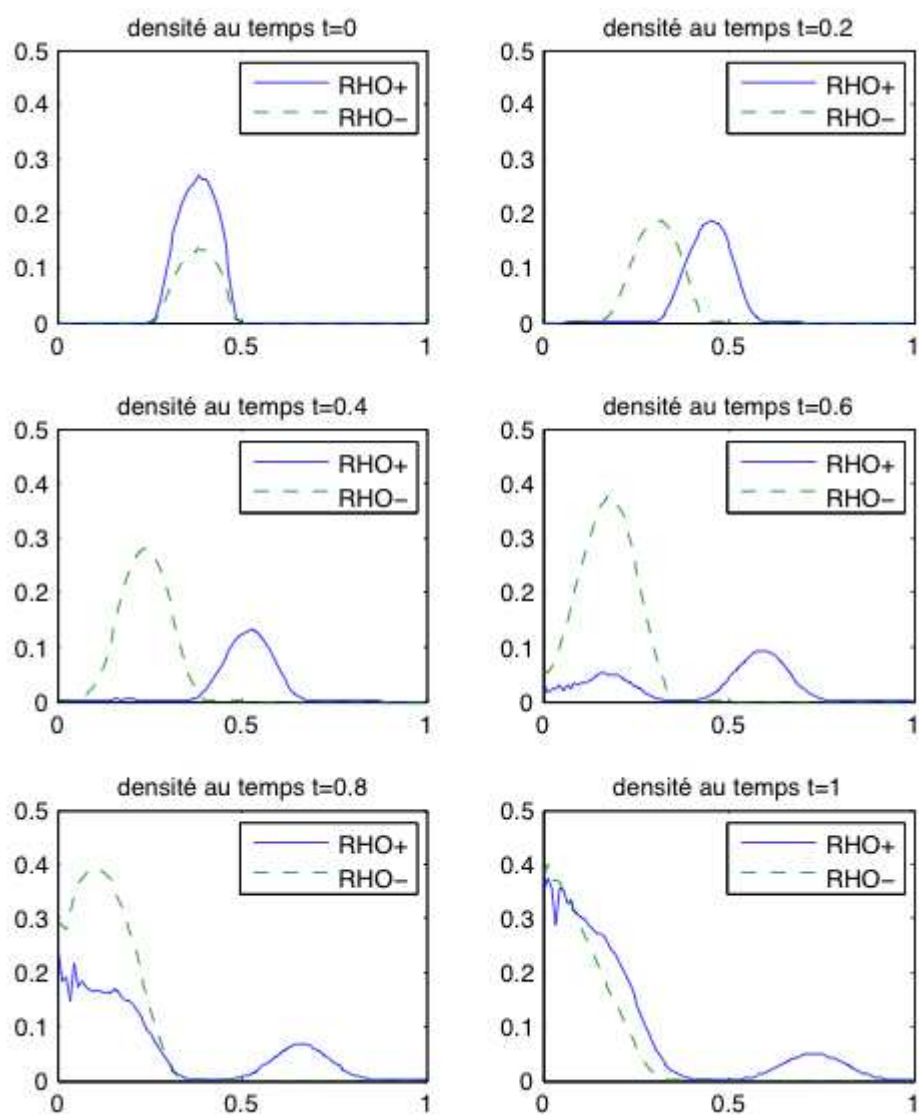


FIGURE 4.3 – Evolution de la densité pour le schéma C

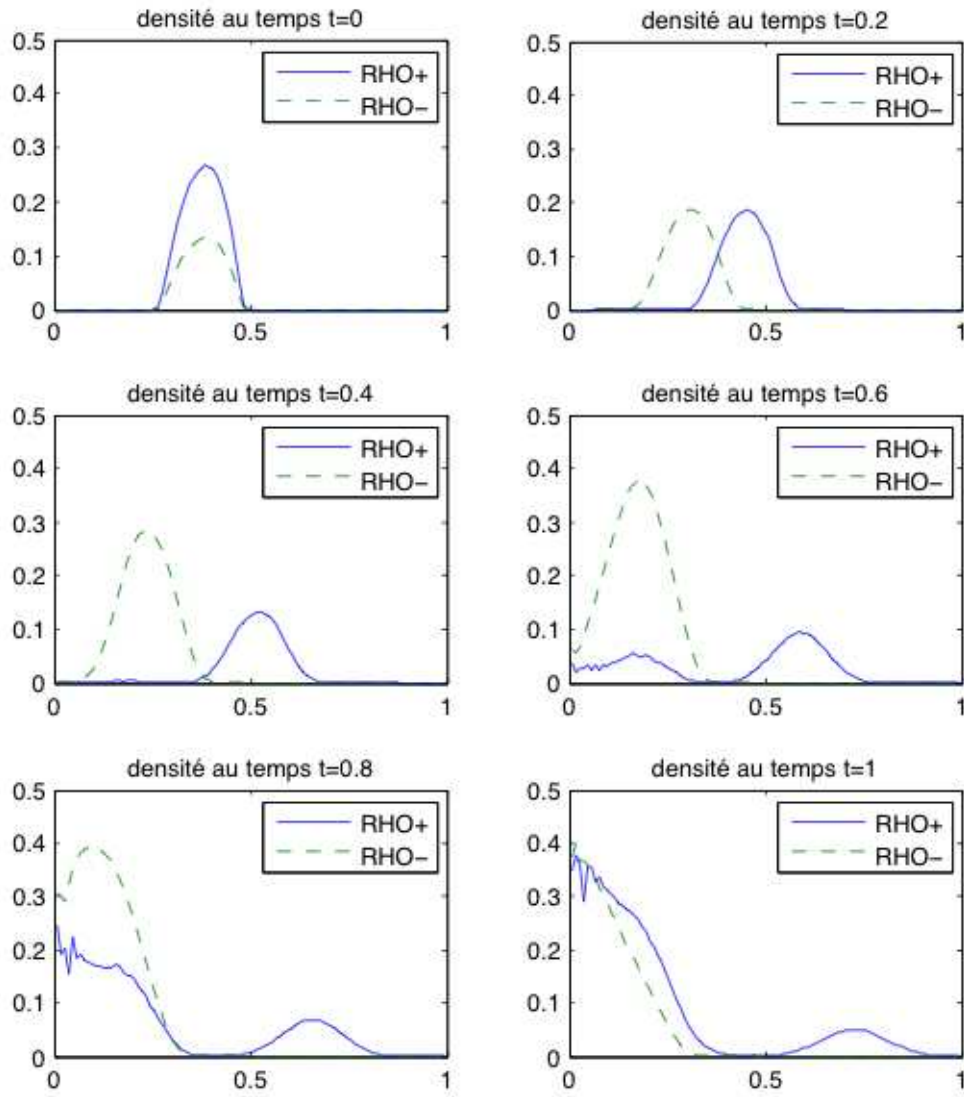


FIGURE 4.4 – Evolution de la masse au cours du temps

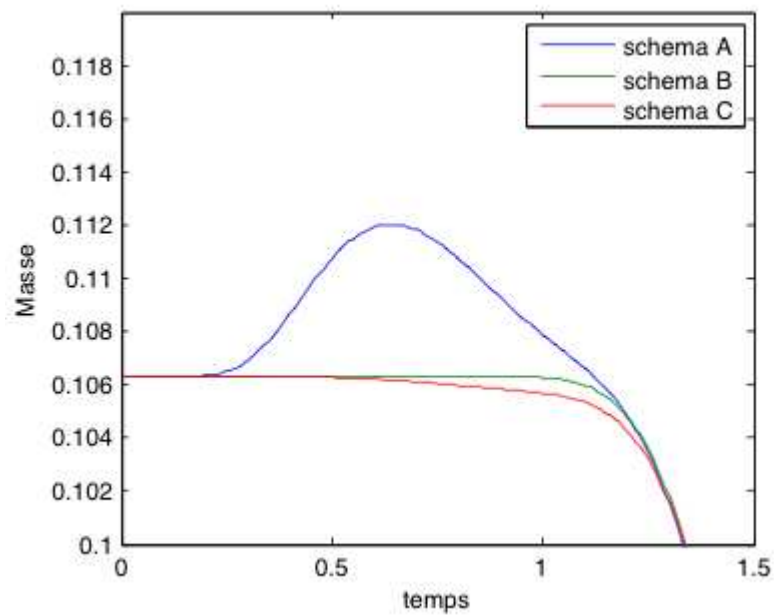


FIGURE 4.5 – Evolution du Hamiltonien au cours du temps

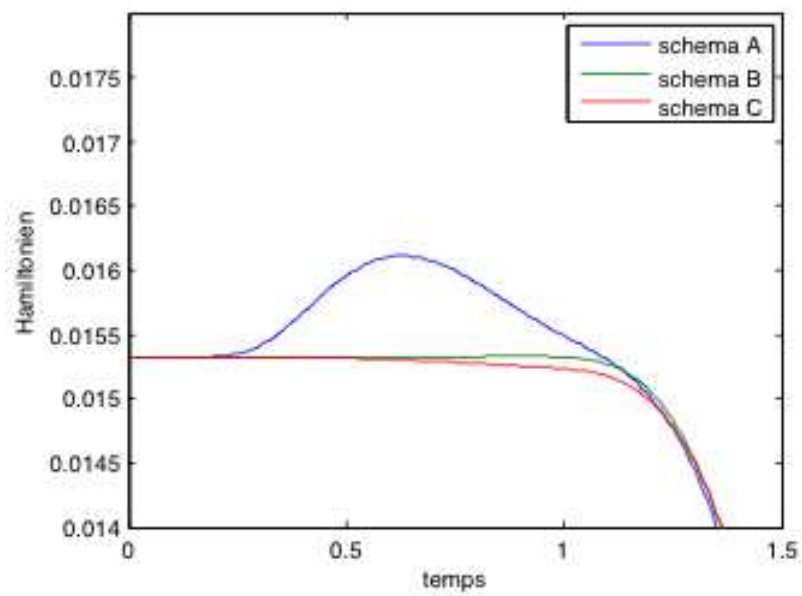
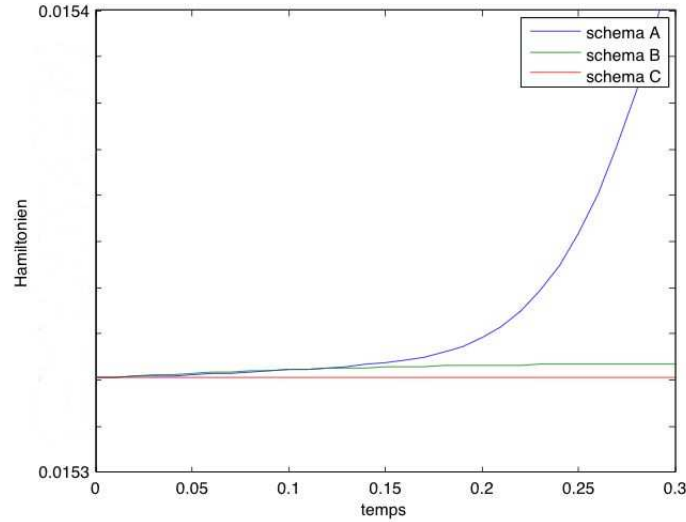


FIGURE 4.6 – Evolution du Hamiltonien en temps petit



4.3.2 Comportement autour d'un état stationnaire

Nous donnons maintenant les idées pour tester nos schémas numériques autour d'états stationnaires bien connus, les polytropes. Pour $p > 9/7$ nous savons qu'il existe un état stationnaire vérifiant

$$Q(r, u) = C \left(-1 - \frac{u^2}{2} - \phi_Q(r) \right)_+^{\frac{1}{p-1}}, \quad (4.3.1)$$

où $(a)_+$ désigne la partie positive de a . Pour des raisons de simplicité, nous étudierons ici le cas $p = 2$. Dans ce cas, en intégrant selon la variable de vitesse u , on trouve

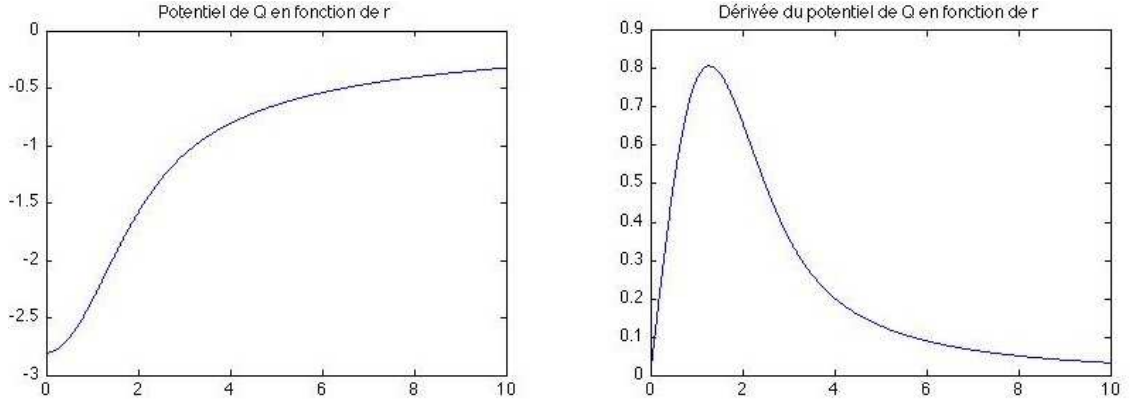
$$\rho_Q(r) = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} C (-1 - \phi_Q(r))_+^2.$$

En choisissant alors $C = \frac{2}{\pi^2 \sqrt{2}}$, le potentiel ϕ_Q satisfait

$$r^2 \phi_Q'' + 2r \phi_Q' = (-1 - \phi_Q(r))_+^2.$$

Cette équation admet une unique solution vérifiant $\phi_Q'(0) = 0$ et tendant vers 0 à l'infini. On utilise alors une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour la résoudre. On obtient ainsi le potentiel ϕ_Q et sa dérivée ϕ_Q' représentés figure 4.7.

Ces graphes nous apportent quelques informations utiles. On peut voir tout d'abord que ϕ_Q reste plus petit que -1 jusqu'à environ $r = 3$. De plus, lorsqu'elle devient plus grande que cette valeur, on sait que $\phi_Q(r) = -\frac{M_1}{4\pi r}$ où M_1 est la masse correspondant à la distribution Q . Ainsi, une étude plus approfondie de la courbe de ϕ_Q nous donne une très bonne approximation de la valeur M_1 : on trouve $M_1 = 40.71$. Notons enfin que le

FIGURE 4.7 – Graphes du potentiel ϕ_Q et du champ gravitationnel ϕ'_Q 

champ de force ϕ'_Q n'est pas plus grand que 1 ce qui permettra de bien choisir les pas de discrétisation afin de respecter la CFL. Notez que nous avons représenté la fonction de distribution Q sur la figure 4.8.

Maintenant, prenons une fonction initiale proche de Q et étudions le comportement asymptotique de la solution numérique correspondante. Nous espérons bien sûr que cette fonction tende vers f^∞ . On choisit f_0 telle que

$$f_0(r, u, s) = \frac{2}{\pi^2 \sqrt{2}} \left(-1 - \frac{u^2}{2} - \phi_Q(r) - b\chi(r)s \right)_+^{\frac{1}{2}}.$$

où $\chi(r)$ est une gaussienne centrée en 0, majorée par 1 et à support dans $[-1, 1]$ et b est une constante faible. On se place sur $[0, R_m] \times [0, U_m]$ avec $R_m = 4$ et $U_m = 3$ ce qui nous permettra d'éviter toute perte de masse sur les bords du domaine. Notons alors $f(t)$ la solution théorique associée à f_0 et f^n sa solution numérique. On remarque numériquement que si $b = 0.1$ alors

$$\sup |f_0(x) - Q(x)| \simeq 0,036.$$

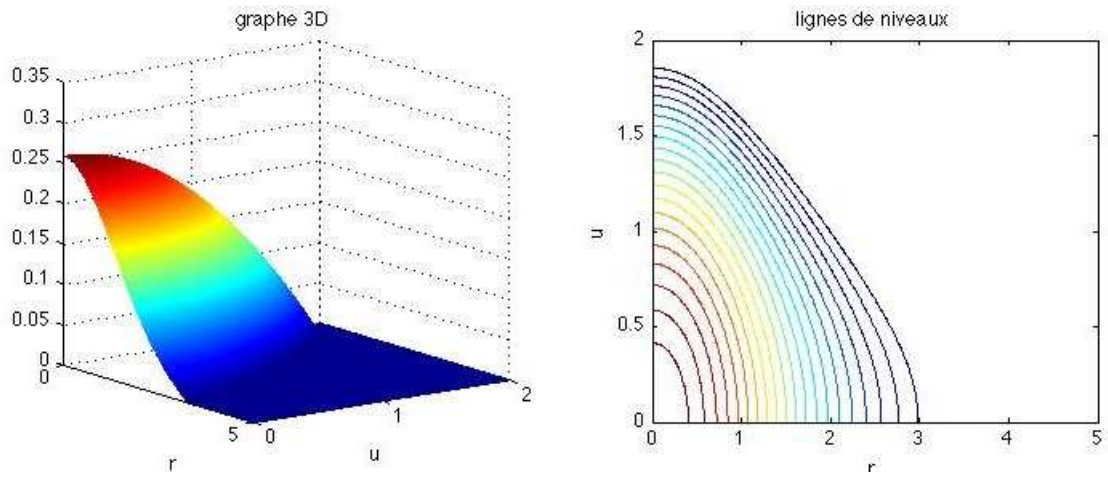
Or, f^n est une approximation de f d'ordre 1 donc, en notant le pas global Δ la condition

$$\Delta \ll 0,036 \tag{4.3.2}$$

est nécessaire pour pouvoir observer un comportement asymptotique nous permettant de conclure. En effet, dans le cas contraire, nous ne saurions pas si les variations par rapport à Q sont dues à la perturbation ou à l'erreur d'estimation du schéma numérique.

Prendre un Δ aussi petit revient à considérer au moins 400 points en espace, 300 points en vitesse, 1200 points en la variable l et le nombre de points de la discrétisation en temps. Le calcul est donc trop lourd.

Pour résoudre ce problème, l'idée est de prendre des opérateurs différentiels d'ordre supérieur ou égal à 2. En effet, notre résultat de conservation de la masse est donné pour des

FIGURE 4.8 – Représentations du polytrophe Q 

opérateurs quelconques et celui concernant le Hamiltonien peut être aisément généralisé. Pour l'instant, cette adaptation est encore en cours d'étude.

Bibliographie

- [1] Alexandre, R., *Weak solutions of the Vlasov-Poisson initial-boundary value problem*, Math. Methods Appl. Sci., 16 (8), 587-607, 1993.
- [2] Aly J.-J., *On the lowest energy state of a collisionless self-gravitating system under phase volume constraints*, MNRAS 241, 15, 1989.
- [3] Antonov, A. V., *Remarks on the problem of stability in stellar dynamics*. Soviet Astr. 4, 859-867, 1961.
- [4] Antonov, A. V., *Solution of the problem of stability of a stellar system with the Emden density law and spherical velocity distribution*, J. Leningrad Univ.Se. Mekh. Astro 7, 135-146, 1962.
- [5] Arsen'ev, A. A., *Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations*, U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. 15, 131-141, 1975.
- [6] Bardos, C., Degond, P., *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3-space variables with small initial data*, Ann. Inst. H. Poincaré (Analyse non linéaire) 2, no. 2, 101-118, 1985.
- [7] Batt, J., Faltenbacher, W., Horst, E., *Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal. 93, 159-183, 1986.
- [8] Ben Abdallah, N., *Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov-Poisson system*, Math. Methods Appl. Sci., 17 (6), 451-476, 1994.
- [9] Binney, J., Tremaine, S., *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 1987.
- [10] Bostan, M., *Boundary value problem for the N-dimensional time periodic Vlasov-Poisson system*, Math. Methods Appl. Sci. 29, no. 15, 1801-1848, 2006.
- [11] Bostan, M., *Existence and uniqueness of the mild solution for the 1D Vlasov-Poisson initial-boundary value problem*, SIAM J. Math. Anal. 37, no. 1, 156-188, 2005.
- [12] Brézis, H., Lieb, E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88, pp. 486-490, 1983.
- [13] Bobylev, A.V., Dukes, P., Illner, R., Victory, H.D. Jr., *On Vlasov-Manev Equations. I : Foundations, Properties, and Nonglobal Existence*, Journal of Statistical Physics, Vol 88, Nos 3/4, 885-911, 1997.
- [14] Bobylev, A.V., Dukes, P., Illner, R., Victory, H.D. Jr., *On Vlasov-Manev Equations. II : Local Existence and Uniqueness*, Journal of Statistical Physics, Vol 91, Nos 3/4, 625-654, 1998.

- [15] Bouchut, F., Golse, F., Pulvirenti, M., *Kinetic Equations and Asymptotic Theory*, Series in Appl. Math. Gauthiers-Villars, Paris, 2000.
- [16] Burchard, A., Guo, Y., *Compactness via symmetrization*, J. Func. Anal., vol. 214, pp. 40-73, 2004.
- [17] Cazenave, T., *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, NYU, CIMS, AMS, Providence, RI, 2003.
- [18] Diacu, F.N., Mingarelli, A., Mioc, V., Stoica, C., *The Manev Two-Body Problem : Quantitative and Qualitative Theory*, WSSIAA 4-World Scientific Publishing, 213-227, 1995.
- [19] Diperna, R.J., Lions, P.L., *Global weak solutions of kinetic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 46(3), 259-288, 1988.
- [20] Diperna, R.J., Lions, P.L., *Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 307(12), 655-658, 1988.
- [21] Dolbeault, J., Sanchez, O., Soler, J., *Asymptotic behaviour for the Vlasov-Poisson system in the stellar-dynamics case*, Arch. Ration. Mech. Anal. 171, 301-327, 2004.
- [22] Doremus, J. P. ; Baumann, G. ; Feix, M. R., *Stability of a Self Gravitating System with Phase Space Density Function of Energy and Angular Momentum*, Astronomy and Astrophysics 29, 401-407, 1973.
- [23] Glassey, R.T., Schaeffer, J., *On symmetric solutions of the relativistic Vlasov-Poisson system*, Comm. Math. Phys. 101, no. 4, 459-473, 1985.
- [24] Guo, Y., *Variational method for stable polytropic galaxies*, Arch. Rat. Mech. Anal. 130, 163-182, 1999.
- [25] Guo, Y., *On generalized Antonov's stability criterion*, Contemp. Math. 263, 85-107, 2000.
- [26] Guo, Y., *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Commun. Math. Phys. 174, 245-263, 1993.
- [27] Guo, Y., Lin, Z., *Unstable and stable galaxy models*, Comm. Math. Phys. 279, 789-813, 2008.
- [28] Guo, Y., Rein, G., *Stable steady states in stellar dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal. 147, 225-243, 1999.
- [29] Guo, Y., Rein, G., *Isotropic steady states in galactic dynamics*, Comm. Math. Phys. 219, 607-629, 2001.
- [30] Guo, Y. ; Rein, G., *A non-variational approach to nonlinear stability in stellar dynamics applied to the King model*, Comm. Math. Phys. 271, no. 2, 489-509, 2007.
- [31] Hadžić, M. ; Rein, G., *Global existence and nonlinear stability for the relativistic Vlasov-Poisson system in the gravitational case*, Indiana Univ. Math. J. 56, 2453-2488, 2007.
- [32] Heerlein, C., Zwicknagel, G., *Nonlinear Landau Damping in Spherically Symmetric Vlasov Poisson Systems*, Journal of Comp. Physics 180, 497-505, 2002.

- [33] Hormander, L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables (3rd Edition ed.)*, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [34] Hormander, L., *L2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. 113, 89-152, 1965.
- [35] Horst, E., Hunze, R., *Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation*, Math. Methods Appl. Sci. 6(2), 262-279, 1984.
- [36] Illner, R.; Neunzert, H., *An existence theorem for the unmodified Vlasov equation*, Math. Methods Appl. Sci. 1, no. 4, 530-544, 1979.
- [37] Kiessling, M.K.-H., Tahvildar-Zadeh, A. S., *On the relativistic Vlasov-Poisson system*, To appear in the Indiana University math Journal.
- [38] Lemou, M., Méhats, F., Raphaël, P., *The Orbital Stability of the Ground States and the Singularity Formation for the Gravitational Vlasov Poisson System*, Arch. Rational Mech. Anal. 189, 425-468, 2008.
- [39] Lemou, M., Méhats, F., Raphaël, P., *Stable self-similar blow-up dynamics for the three dimensional gravitational Vlasov-Poisson system*, J. Amer. Math. Soc. **21**, no. 4, 1019-1063, 2008.
- [40] Lemou, M., Méhats, F., Raphaël, P., *Stable ground states fo the relativistic gravitational Vlasov-Poisson system*, Comm. Partial Diff. Eq. 34, no. 7, 703-721, 2009.
- [41] Lemou, M., Méhats, F., Raphaël, P., *A new variational approach to the stability of gravitational systems*, Comm. Math. Phys. 302, 161-224, 2011.
- [42] Lemou, M., Méhats, F., Raphaël, P., *Orbital stability of spherical galactic models*. Invent Math, 187 : 145-194, 2012.
- [43] Lieb, H., Loss, M., *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 14, 1997.
- [44] Lynden-Bell, D., *The Hartree-Fock exchange operator and the stability of galaxies*, Mon. Not. R. Astr. Soc. 144, 189-217, 1969.
- [45] Lions, P-L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I.*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1**(2), 109-145, 1984.
- [46] Lions, P-L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II.*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1**(4), 223-283, 1984.
- [47] Lions, P.-L., Perthame B., *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. 105, 415-430, 1991.
- [48] Manev, G., *La gravitation et le principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, Comptes Rendus 178, 2159-2161, 1924.
- [49] Manev, G., *Die gravitation und das Prinzip von Wirkung und Gengenwirkung*, Zeitschrift für Physik 31, 786-802, 1925.
- [50] Manev, G., *Le principe de la moindre action et la gravitation*, Comptes Rendus 190, 963-965, 1930.

- [51] Manev, G., *La gravitation et l'énergie au zéro*, Comptes rendus 190, 1374-1377, 1930.
- [52] Merle, F., Raphael, P., *Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation*, Geom. Funct. Anal. 13, no. 3, 591-642, 2003.
- [53] Mischler, S., *On the initial boundary value problem for the Vlasov-Poisson-Boltzmann system*, Comm. Math. Phys., 210 (2), 447-466, 2000.
- [54] Mouhot, C., Villani, C., *On Landau damping*, Acta Math. 207, 29-201, 2011.
- [55] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, J. Differential Equations 95, 281-303, 1992.
- [56] Rodewis, T., *Numerical treatment of the symmetric Vlasov-Poisson and Vlasov-Einstein system by particle methods*, PhD thesis (director Rein, G.), Munich, 1999.
- [57] Sanchez, O., Soler, J., *Orbital Stability for polytropic galaxies*, Ann. Inst. Henri Poincaré, AN 23, 781-802, 2006.
- [58] Schaeffer, J., *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions*, Comm. Partial Differential Equations 16, 1313-1335, 1991.
- [59] Schaeffer, J., *Steady states in stellar dynamics*, Arch. Rational. Mech. Anal. 172, 1-19, 2004.
- [60] Weinstein, M.I., *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*, Comm. Math. Phys. 87, 567-576, 1983.
- [61] Wolansky, G., *On nonlinear stability of polytropic galaxies*, Ann. Inst. Henri Poincaré, AN 16, 15-48, 1999.